$\boxed{\text{Mathematisch Compendium}}$

W.J. van der Star

Inhoudsopgave

1. Algebraïsche Vergelijkingen **1**

2. Differentiaal- en Integraalrekening **6**

3. Fourieranalyse **60**

4. Complexe Functietheorie **70**

5. Lineaire Algebra **86**

6. Differentiaalvergelijkingen **95**

7. Variatierekening **120**

8. Goniometrie en Trigonometrie **123**

9. Vectoranalyse **129**

10. Tensoranalyse **148**

11. Planimetrie **163**

12. Stereometrie **176**

13. Boldriehoeksmeetkunde **185**

14. Analytische Meetkunde **189**

15. Differentiaal Meetkunde **206**

16. Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening **223**

Algebraïsche Vergelijkingen

De ***n*-de graads vergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{P_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = 0 \mid c_i, x \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^+}$$

Algemeen geldt dat $P_n(x)$ juist n nulpunten ofwel wortels heeft behorende tot $\mathbb{C}$, inclusief eventueel samenvallende nulpunten.
Tevens geldt dat als $\alpha = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}$ een oplossing is van $P_n(x) = 0$, dan is $\alpha^* = a - bi$ een oplossing van $P_n^*(x) \equiv c_0^*x^m + \cdots + c_n^* = 0 \rightarrow$
Als een n-de graads vergelijking met reële coëfficiënten een imaginaire oplossing heeft, dan is de complex geconjugeerde waarde ook een oplossing van de vergelijking.

Elk polynoom $P_n(x)$ kan op 1 unieke wijze ontbonden worden in een produkt van de vorm:

$$\boxed{P_n(x) = c_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \mid x \in \mathbb{C}}$$

Hierin zijn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de wortels van de corresponderende vergelijking $P_n(x) = 0$.
Als er meervoudige wortels zijn, dan geldt:

$$\boxed{P_n(x) = c_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2}\ldots(x - x_l)^{m_l} \mid m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n}$$

Hierin is l het aantal nulpunten die onderling van elkaar verschillen.
de vergelijking $P_n(x) = 0$ is te schrijven als: $c_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0 \Leftrightarrow$
$c_0[x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - \cdots + (-1)^n x_1x_2\ldots x_n] = 0$
Vergelijking van de coëfficiënten met $c_ox^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ geeft:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = -c_0(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ c_2 = c_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = (-1)^n c_0x_1x_2\ldots x_n \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -c_1/c_0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = c_2/c_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n c_n/c_0 \end{array}\right.}$$

De **1-ste graads** - ofwel **lineaire vergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{ax + b = 0 \mid a, b, x \in \mathbb{C}}$$

Voor de oplossing geldt:

$$\boxed{x_1 = -\frac{b}{a}}$$

De **2-de graads** - ofwel **kwadratische vergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \mid a, b, c, x \in \mathbb{C}}$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}}$$

Voor $a, b, c \in I\!R$ wordt de **discriminant** Δ gedefinieerd als:

$$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$$

$\Delta > 0 \;\Rightarrow\; x_1, x_2$ zijn reëel met $x_1 \neq x_2$
$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$ en reëel
$\Delta < 0 \;\Rightarrow\; x_1, x_2$ zijn complex resp. complex geconjugeerd.

Voor de som en het produkt van x_1 en x_2 geldt:

$$\boxed{x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \;\wedge\; x_1x_2 = \frac{c}{a}}$$

De **3-de graads** - ofwel **kubieke vergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{ax^3+bx^2+cx+d=0 \mid a,b,c,d,x \in \mathbb{C}}$$

Substitutie van $\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3 = x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^3}{27a^3}$ in $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ geeft:

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\left(\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}\right)=0$$

<u>Stel</u>: $z = x+\frac{b}{3a} \wedge p = \frac{c}{a} \wedge q = \frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3} \rightarrow z^3+pz+q=0 \mid p,q,z \in \mathbb{C}$

Substitutie van $z = u+v$ geeft: $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$

Opdat $u+v$ een wortel is van $z^3+pz+q=0$ moet gelden: $\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0 \end{cases} \rightarrow$
$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\frac{1}{3}p \end{cases}$

Als u en v voldoen aan $uv=-\frac{1}{3}p$, dan geldt: $u^3v^3=-\frac{1}{27}p^3 \rightarrow \begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{1}{27}p^3 \end{cases} \rightarrow$

u^3 en v^3 zijn wortels van de vergelijking $t^2 + qt - \frac{1}{27}p^3 = 0$, met $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 \rightarrow$
$u^3 = \frac{1}{2}(-q + \sqrt{\Delta}) \wedge v^3 = \frac{1}{2}(-q - \sqrt{\Delta})$
<u>Stel</u>: α en β is een willekeurige wortel van $\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\Delta})$ resp. $\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\Delta}) \rightarrow$
$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)\alpha$ en $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)\alpha$ zijn de 2 andere wortels van $\frac{1}{2}(-q+\sqrt{\Delta})$ resp. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)\beta$ en $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)\beta$ zijn de 2 andere wortels van $\frac{1}{2}(-q-\sqrt{\Delta})$, waarbij β die wortel is waarvoor geldt: $\alpha\beta = -\frac{1}{3}p \rightarrow z_1 = \alpha + \beta$ is een wortel van $z^3 + pz + q = 0$.
$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\alpha.\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)\beta = \alpha\beta \rightarrow$
$z_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\alpha + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)\beta = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha - \beta)i$
$\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)\alpha.\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\beta = \alpha\beta \rightarrow$
$z_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)\alpha + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\beta = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha - \beta)i$
Uit $x = z - (b/3a)$ volgt dan:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -\dfrac{b}{3a} + (\alpha + \beta) \\[2ex] x_2 = -\dfrac{b}{3a} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha - \beta)i \\[2ex] x_3 = -\dfrac{b}{3a} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha - \beta)i \end{cases}}$$

De 3 wortels zijn te schrijven in de vorm van de <u>**Formule van Cardano**</u>:

$$\boxed{x_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

De discriminant Δ volgt uit de vergelijking $t^2 + qt - \frac{1}{27}p^3 = 0$:

$$\Delta = q^2 + \tfrac{4}{27}p^3 = \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right)^2 + \tfrac{4}{27}\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)^3 \rightarrow$$

$$\boxed{\Delta = \frac{d^2}{a^2} - \frac{2bcd}{3a^2} + \frac{4b^3d}{27a^4} - \frac{b^2c^2}{27a^4} + \frac{4c^3}{27a^3}}$$

$\Delta > 0 \;\Rightarrow\; x_1$ reëel en x_2, x_3 complex geconjugeerd.
$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; x_1$ reëel en $x_2 = x_3$ reëel.
$\Delta < 0 \;\Rightarrow\; x_1, x_2, x_3$ verschillend en reëel.

Voor de som en het produkt van x_1, x_2, x_3 geldt:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \;\wedge\; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \;\wedge\; x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}}$$

De **4-de graads vergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \mid a, b, c, d, e, x \in \mathbb{C}}$$

Als $x^4 + (b/a)x^3 + (c/a)x^2 + (d/a)x + (e/a)$ een volkomen kwadraat zou zijn, dan zou ze te schrijven zijn als $(x^2 + (b/2a)x + \frac{1}{2}\lambda)^2 \rightarrow$

$$\left(x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}\right) - \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda\right)^2 =$$

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} - \lambda\right)x^2 + \left(\frac{d}{a} - \frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{e}{a} - \tfrac{1}{4}\lambda^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda\right)^2 = \left(\lambda + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{b\lambda}{2a} - \frac{d}{a}\right)x + \left(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \frac{e}{a}\right)$$

Het rechterlid is een volkomen kwadraat als geldt:

$$\Delta = \left(\frac{b\lambda}{2a} - \frac{d}{a}\right)^2 - 4\left(\lambda + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\left(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \frac{e}{a}\right) = 0 \rightarrow$$

<u>Resolvente van Ferrari</u>: $\lambda^3 - \dfrac{c}{a}\lambda^2 + \left(\dfrac{bd}{a^2} - \dfrac{4e}{a}\right)\lambda - \left\{\dfrac{e(b^2-4ac)}{a^3} + \dfrac{d^2}{a^2}\right\} = 0$

<u>Stel</u>: λ_1 is een wortel van de Resolvente van Ferrari $\rightarrow$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda_1\right)^2 = \left(\lambda_1 + \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)x^2 + \left(\frac{b\lambda_1}{2a} - \frac{d}{a}\right)x + \left(\tfrac{1}{4}\lambda_1^2 - \frac{e}{a}\right)$$

$$\lambda_1 + \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \frac{b\lambda_1}{2a} - \frac{d}{a} = 0 \rightarrow \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda_1\right)^2 = \tfrac{1}{4}\lambda_1^2 - \frac{e}{a}$$

<u>Stel</u>: $\sqrt{\tfrac{1}{4}\lambda_1^2 - (e/a)} = \pm\omega \rightarrow$

$$\boxed{x^2 + \frac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda_1 \pm \omega = 0}$$

$$\lambda_1 + \frac{b^2-4ac}{4a^2} \neq 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda_1\right)^2 = \left(\lambda_1 + \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\left(x + \frac{(b\lambda_1 - 2d)a}{4a^2\lambda_1 + b^2 - 4ac}\right)^2$$

<u>Stel</u>: $\sqrt{\lambda_1 + [(b^2-4ac)/4a^2]} = \pm\chi \rightarrow x^2 + \dfrac{b}{2a}x + \tfrac{1}{2}\lambda_1 = \pm\chi\left(x + \dfrac{(b\lambda_1-2d)a}{4a^2\lambda_1 + b^2 - 4ac}\right) \rightarrow$

$$\boxed{x^2 + \left(\frac{b}{2a} \mp \chi\right)x + \left(\tfrac{1}{2}\lambda_1 \mp \chi\frac{(b\lambda_1-2d)a}{4a^2\lambda_1 + b^2 - 4ac}\right) = 0}$$

Een **wederkerige vergelijking** van de n-de graad is een algebraïsche vergelijking waarvoor geldt:

$$\boxed{x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda P(x) \mid x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \lambda = \pm 1}$$

Als $\lambda = 1$ resp. $\lambda = -1$, dan is de vergelijking van de 1-ste soort resp. van de 2-de soort. Elke wederkerige vergelijking is te herleiden tot het type van de 1-ste soort en van een even graad.

<u>Stel</u>: $c_0x^{2p} + c_1x^{2p-1} + \cdots + c_px^p + \cdots + c_1x + c_0 = 0 \mid p \in I\!N \rightarrow$

$$c_0x^p + c_1x^{p-1} + \cdots + c_p + \cdots + \frac{c_1}{x^{p-1}} + \frac{c_0}{x^p} = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_0\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) + c_1\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + \cdots + c_{p-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + c_p = 0$$

Elke term van de vorm $x^k + (1/x^k)$ is te schrijven als een veelterm van de k-de graad in x:

$$x^k + \frac{1}{x^k} = x^k - kz^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2!}z^{k-4} - \frac{k(k-4)(k-5)}{3!}z^{k-6} + \cdots +$$
$$\frac{(-1)^j k(k-j-1)(k-j-2)\cdots(k-2j+1)}{j!}z^{k-2j} + \cdots \to$$

$C_0 z^p + C_1 z^{p-1} + \cdots + C_{p-1} z + C_p = 0$
Bij elke wortel α van deze vergelijking horen 2 wortels van de gegeven wederkerige vergelijking die volgen uit $x + (1/x) = \alpha$, ofwel $x^2 - \alpha x + 1 = 0 \to x_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4})$

Een **binomiaalvergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{ax^p + bx^q = 0 \mid a, b, x \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}, p > q}$$

$$ax^p + bx^q = ax^q\left(x^{p-q} + \frac{b}{a}\right) = 0 \to x^q = 0 \vee x^{p-q} + \frac{b}{a} = 0 \to x = 0$$

<u>Stel</u>: $p - q = n \to x^n = -b/a = \rho(\cos\Theta + i\sin\Theta) \to$

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\Theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\Theta + 2k\pi}{n}\right) \Bigg| \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden is van de vorm:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Als de cofactordeterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, dan worden de oplossingen gegeven door de <u>**Regel van Cramer**</u>:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta'_n}{\Delta_n}}$$

Hierin volgt Δ'_n uit Δ_n door de j-de kolom te vervangen door $b_1, \ldots, b_n$.

Differentiaal- en Integraalrekening

De verz. van de **natuurlijke getallen** $I\!N$ bestaat uit nul en de pos. gehele getallen:
$I\!N = 0, 1, 2, \ldots$
De verz. van de **gehele getallen** $Z\!\!Z$ bestaat uit nul en alle pos. - en neg. gehele getallen:
$Z\!\!Z = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
De verz. van de **rationele getallen** Q bestaat uit nul en alle pos. en neg. gehele - en gebroken getallen: $Q = p/q \mid p, q \in Z\!\!Z, q \neq 0$
De verz. van de **reële getallen** $I\!R$ bestaat alle getallen die Q vormen en de **irrationale getallen**, die bestaan uit de **algebraïsche getallen**, dit zijn de getallen die een wortel zijn van een algebraïsche vergelijking, en de **trancendente getallen**, dit zijn alle getallen die niet algebraïsch zijn. Er geldt dus:

$$\boxed{I\!N \subset Z\!\!Z \subset Q \subset I\!R}$$

Voor de reële getallen geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} a + b = b + a \\ ab = ba \\ a(bc) = (ab)c \\ a(b + c) = ab + ac \end{array}}$$

De **binomiaalcoëfficiënt** $\binom{a}{b}$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \;\Big|\; n, k \in I\!N, k \leq n}$$

Voor de ontwikkeling van $(a + b)^n \mid n \in I\!N^+$ geldt het **Binomium van Newton**:

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \;\Big|\; n \in I\!N^+}$$

Een **functie** $f(x)$ van een verz. V naar W is een voorschrift waarbij aan elk element van het domein V op eenduidige wijze 1 element van het bereik van W wordt toegevoegd: $f(x) : V \to W$

Een functie $f(x)$ gedefinieerd in een gereduceerde omgeving van a heeft voor $x \to a$ de limiet L, als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo, dat $|f(x) - L| < \varepsilon$ als $0 < |x - a| < \delta$.

Insluitstelling: Als in een gereduceerde omgeving van a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en $\lim_{x \to a} g(x) = L$ en $\lim_{x \to a} h(x) = L$, dan geldt tevens dat $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Een functie $f(x)$ gedefinieerd in een omgeving van a is continu in $x = a$ als geldt:
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Stelling van Weierstrasz: Als een functie $f(x)$ op $[a, b]$ continu is met $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$, dan is er minstens 1 punt $c \in < a, b >$ zo, dat $f(c) = 0$.

<u>**Tussenwaardestelling**</u>: Als een functie $f(x)$ op $[a,b]$ continu is met $f(a)=A$, $f(b)=B$, dan is er minstens 1 punt $c \in <a,b>$ zo, dat $f(c)=C$.

Het **differentiaalquotiënt** $f'(a)$ van een functie $f(x)$ in $x=a$ wordt gedefinieerd door:

$$\boxed{f'(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

Substitutie van $a + \Delta x = x$ geeft:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Als een functie $f(x)$ differentieerbaar is in $x=a$, dan is deze continu in $x=a$.
Een functie $f(x)$ is alleen dan differentieerbaar in $x=a$ als er in een omgeving van a een functie φ bestaat welke continu in a is zo, dat $f(x) - f(a) = (x-a)\phi(x)$.
Als $f(x)$ in elk punt differentieerbaar is, dan wordt de **afgeleide functie** $f'(x)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{f'(x) = D_x f(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Als $n \in I\!N^+$, dan geldt voor de n-de afgeleide functie:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}}$$

Voor de afgeleide functie van de som, het verschil, produkt en quotiënt van $u(x)$ en $v(x)$ geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} D_x\{u(x) \pm v(x)\} = D_x u(x) \pm D_x v(x) \\[2ex] D_x\{u(x)v(x)\} = v(x)D_x u(x) + u(x) D_x v(x) \\[2ex] D_x \left\{\dfrac{u(x)}{v(x)}\right\} = \dfrac{v(x)D_x u(x) - u(x) D_x v(x)}{v^2(x)} \end{array}}$$

$$D_x\{u_1(x)u_2(x)\ldots u_n(s)\} = \{D_x u_1(x)\}u_2(x)\ldots u_n(x) + u_1(x)\{D_x U_2(x)\}u_3(x)\ldots u_n(x) + \ldots +$$

$$u_1(x)\ldots u_{n-1}(x)\{D_x u_n(x)\} \to$$

$$\boxed{D_x \prod_{k=1}^{n} u_k(x) = \prod_{k=1}^{n} u_k(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{D_x u_k(x)}{u_k(x)}}$$

$$u_1(x) = u_2(x) = \ldots = u_n(x) = u(x) \Rightarrow D_x u^n(x) = u^n(x) \left\{\frac{D_x u(x)}{u(x)} + \cdots + \frac{D_x u(x)}{u(x)}\right\} \Leftrightarrow$$

$$D_x u^n(x) = u^n(x) \frac{n D_x u(x)}{u(x)} \to$$

$$\boxed{D_x u^n(x) = n u^{n-1}(x) D_x u(x) \mid n \in I\!R}$$

Substitutie van $u(x) = x$ geeft:

$$\boxed{D_x x^n = nx^{n-1} \mid n \in I\!R}$$

Voor de afgeleide functie van de samengestelde functie $z = g(y) \mid y = f(x)$ geldt de **Kettingregel**:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{df(x)}{dx}}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \to \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon \mid h \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0 \to$
$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \varepsilon h \to$

$$\boxed{\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x}$$

De **differentiaal** $df(x)$ van $f(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{df(x) = f'(x)\Delta x}$$

$f(x) = x \Rightarrow \Delta x = dx \to$

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

Als bij elk element van het bereik precies 1 element van het domein hoort, dan is $f^{inv}(x)$ de **inverse functie** van $f(x)$. Er geldt dan:

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{inv}\{f(x)\} = x \\ f\{f^{inv}(y)\} = y \end{array}}$$

Als $f(x)$ continu is en monotoon stijgt resp. daalt, dan is $f^{inv}(x)$ ook continu en stijgt resp. daalt monotoon.
Als $f(x)$ differentieerbaar is in $x = c$ en een inverse functie φ bezit met $f'(c) \neq 0$, dan is φ differentieerbaar in $y = f(c) = C$. Er geldt dan:

$$\boxed{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{y=C} \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=c} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1}$$

<u>Stel</u>: $y = \sin x \to \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cos(x + \frac{1}{2}\Delta x) \to \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$; analoog voor $D_x \cos x$

$D_x \tan x$ volgt uit $\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $D_x \cot x$ uit $\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $D_x \sec x$ uit $\dfrac{1}{\cos x}$ en $D_x \operatorname{cosec} x$ uit $\dfrac{1}{\sin x}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} D_x \sin x = \cos x & D_x \cos x = -\sin x \\ & \\ D_x \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} & D_x \cot x = -\dfrac{1}{\sin^2 x1} \\ & \\ D_x \sec x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & D_x \operatorname{cosec} x = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \end{array}}$$

$D_x \sin x = \cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) \rightarrow D_x^2 \sin x = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{1}{2}\pi) \rightarrow$
$D_x^3 \sin x = -\cos x = \sin(x + 3.\frac{1}{2}\pi) \ldots$; analoog voor $D_x^n \cos x \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_x^n \sin x = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi) \\ D_x^n \cos x = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi) \end{array}}$$

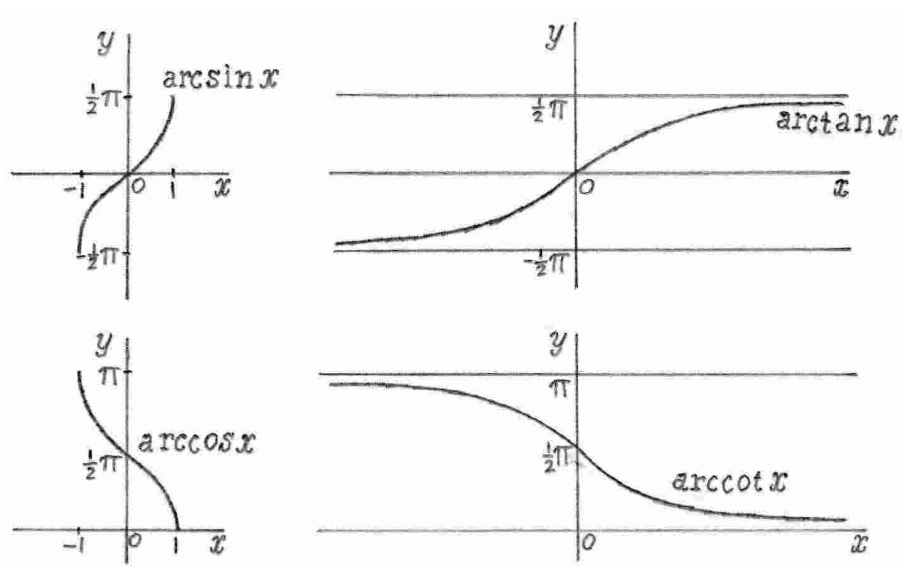
$D_x e^x \sin x = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{1}{4}\pi) \rightarrow$
$D_x^2 \sin x = \sqrt{2} e^x \{\sin(x + \frac{1}{4}\pi) + \cos(x + \frac{1}{4}\pi)\} = (\sqrt{2})^2 e^x \cos x = (\sqrt{2})^2 e^x \sin(x + 2.\frac{1}{4}\pi) \ldots$;
analoog voor $D_x^n e^x \cos x \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_x^n e^x \sin x = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \frac{1}{4}n\pi) \\ D_x^n e^x \cos x = (\sqrt{2})^n e^x \cos(x + \frac{1}{4}n\pi) \end{array}}$$

Een functie heet $f(x)$ stijgend in x_0 als er een omgeving Ω van x_0 bestaat zo, dat geldt:
$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \wedge x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \mid x \in \Omega$, ofwel: als $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \rightarrow$

Als $f(x)$ monotoon stijgend en differentieerbaar is, dan is $f'(x) \geq 0$.

$f(x) = \sin x \mid x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \quad \Rightarrow \quad f^{inv}(x) = \arcsin x \mid x \in [-1, 1]$
$f(x) = \cos x \mid x \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad f^{inv}(x) = \arccos x \mid x \in [-1, 1]$
$f(x) = \tan x \mid x \in < -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi > \quad \Rightarrow \quad f^{inv}(x) = \arctan x \mid x \in I\!R$
$f(x) = \cot x \mid x \in < 0, \pi > \quad \Rightarrow \quad f^{inv}(x) = \text{arccot}\, x \mid x \in I\!R$



Enige cyclometrische betrekkingen zijn:

$$\boxed{\begin{array}{l} \arcsin(-x) = -\arcsin x \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ \arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi \\ \arctan(-x) = -\arctan x \\ \text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}\, x \\ \arctan x + \text{arccot}\, x = \frac{1}{2}\pi \end{array}}$$

Stel: $y = \arcsin x \to y' = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{\cos y}$; uit $x = \sin y$ volgt $\cos y = \sqrt{1-x^2}$; analoge afleidingen gelden voor de overige cyclometrische functies:

$$\boxed{\begin{aligned}
&D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&D_x \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&D_x \arctan x = \frac{1}{1+x^2}\\
&D_x \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\\
&D_x \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\
&D_x \operatorname{arccosec} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}}$$

Een **primitieve functie** $F(x)$ van een functie $f(x)$ is een functie waarvoor geldt:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

De **onbepaalde integraal** van $f(x)$ naar x wordt nu gedefinieerd als:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \mid F'(x) = f(x)}$$

Uit de afgeleide van de elementaire functies volgt de onbepaalde integraal:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;\Bigg|\; n \in I\!R \setminus -1\\
&\int \sin x dx = -\cos x + C\\
&\int \cos x dx = \sin x + C\\
&\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C\\
&\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C\\
&\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C\\
&\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \operatorname{cosec} x + C\\
&\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C\\
&\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C\\
&\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C = -\operatorname{arccosec} x + C
\end{aligned}}$$

<u>**Hoofdstelling van de integraalrekening**</u>: De afgeleide functie van een onbepaalde integraal met continue integrand naar de bovengrens is gelijk aan de integrand als functie van die bovengrens:

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow I'(x) = f(x)}$$

Als $F(x)$ een primitieve van $f(x)$ is, dan geldt dus: $I'(x) = F'(x) \to I(x) - F(x) = C$

<u>Stel</u>: $x = a \to I(a) - F(a) = C \Leftrightarrow C = -F(a)$

<u>Stel</u>: $x = b \to I(b) - F(b) = -F(a) = \int_a^b f(t)dt \to$

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Eigenschappen van bepaalde integralen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b \{\lambda f(x) \pm \mu g(x)\}dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \pm \mu \int_a^b g(x)dx \;\Big|\; \lambda, \mu \in I\!R \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \\ \displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \end{array}}$$

De functie de **natuurlijke logaritme** $x \to \ln x$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\int_1^t \frac{dt}{t} = \ln x \;\Big|\; x > 0}$$

Eigenschappen van de logaritmische functie zijn:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln ab = \ln a + \ln b \\ \ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b \\ \ln a^n = n \ln a \mid n \in I\!N \end{array}}$$

$x_2 > x_1 > 0 \Rightarrow x_2/x_1 > 1 \to \ln(x_2/x_1) > 0 \to \ln x_2 - \ln x_1 > 0 \to$
De logaritmische functie is monotoon stijgend.

<u>Stel</u>: $2^n \leq x < 2^{n+1} \to n \ln 2 \leq \ln x \to \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

<u>Stel</u>: $x = \dfrac{1}{t} \to \lim_{x \downarrow 0} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln \dfrac{1}{t} = -\lim_{t \to \infty} \ln t = -\infty$

$t > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{t} < 1 \to \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x dt = x - 1 \Rightarrow \ln x < x$ voor $x > 1$, ofwel: $0 < \dfrac{\ln x}{x} < 1 \to$

$0 < \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < \dfrac{2}{\sqrt{x}} \to$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

<u>Stel</u>: $x = \dfrac{1}{t} \to \lim\limits_{x\downarrow 0} x \ln x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln t}{t} \to$

$$\boxed{\lim_{x\downarrow 0} x \ln x = 0}$$

<u>Stel</u>: $x = y^{1/a} \mid a \in I\!R^+ \to \lim\limits_{x\downarrow 0} x^a \ln x = \lim\limits_{y\downarrow 0} y \ln y^{1/a} = \dfrac{1}{a} \lim\limits_{x\downarrow 0} y \ln y \to$

$$\boxed{\lim_{x\downarrow 0} x^a \ln x = 0 \mid a \in I\!R^+}$$

$\dfrac{\ln^p x}{x^a} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{a/p}}\right)^p = \left(\dfrac{p}{a} \cdot \dfrac{\ln x^{a/p}}{x^{a/p}}\right)^p = \left(\dfrac{p}{a}\right)^p \left(\dfrac{\ln x^{a/p}}{x^{a/p}}\right)^p \Bigg| \; p \in I\!R, a \in I\!R^+$

<u>Stel</u>: $x^{a/p} = y \to \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\ln x^{a/p}}{x^{a/p}}\right)^p = \lim\limits_{y\to\infty} \left(\dfrac{\ln y}{y}\right)^p = \left(\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\ln y}{y}\right)^p = 0^p = 0 \to$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^p x}{x^a} = 0 \;\Bigg|\; p \in I\!R, a \in I\!R^+}$$

<u>Stel</u>: $\ln x = y \to \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^p}{e^{ay}} = 0$; substitutie van $b = e^a$ geeft (met $a > 0 \to b > 1$):

$\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^p}{b^y} = 0 \to$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \;\Bigg|\; p, a \in I\!R, a > 1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x/x)} = e^0 \to$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1}$$

Uit de definitie van de natuurlijke logaritme volgt voor de afgeleide:

$$\boxed{D_x \ln x = \frac{1}{x}}$$

$D_x \ln x = x^{-1} \to D_x^2 \ln x = -x^{-2} \to D_x^3 \ln x = (-1)^2.1.2x^{-3} \ldots \to$

$$\boxed{D_x^n \ln x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}}$$

De **machtsfunctie** $x \to x^a$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{x \to x^a \mid a = p/q,\ \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0}$$

Eigenschappen van de machtsfunctie zijn:

$$\boxed{\begin{array}{l} x^a x^b = x^{a+b} \\ (x^a)^b = x^{ab} \\ (xy)^a = x^a y^a \end{array}}$$

De **exponentiële functie** $x \to e^x$ is de inverse van de logaritmische functie: $x \to e^x \mid x \in \mathbb{R}$

<u>Stel</u>: $y = e^x \to \ln y = x \to y' = \dfrac{1}{dx/dy} = y \to$

$$\boxed{D_x e^x = e^x}$$

Hieruit volgt voor de onbepaalde integraal:

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

$D_x e^{ax} = a e^{ax} \to D_x^2 e^{ax} = a^2 e^{ax} \ldots \to$

$$\boxed{D_x^n e^{ax} = a^n e^{ax}}$$

De **algemene exponentiële functie** $x \to a^x$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a} \mid a > 0, a \neq 1}$$

<u>Stel</u>: $y = a^x \to \ln y = x \ln a \to \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \ln a \Leftrightarrow y' = y \ln a \to$

$$\boxed{D_x a^x = a^x \ln a}$$

Hieruit volgt voor de onbepaalde integraal:

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

$D_x a^{kx} = k a^{kx} \ln a \to D_x^2 a^{kx} = k^2 a^{kx} \ln^2 a \ldots \to$

$$\boxed{D_x^n a^{kx} = k^n a^{kx} \ln^n a}$$

<u>Stel</u>: $h(x) = f(x)^{g(x)} \to \ln h(x) = g(x) \ln f(x) \to \dfrac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)} \to$

Logaritmische afgeleide:

$$\boxed{D_x f(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \left\{ g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}}$$

De **algemene logaritmische functie** $x \to {}^a\log x$ wordt gedefinieerd als de inverse functie van de machtsfunctie $x \to x^a \mid a > 0$:

$$\boxed{x \to {}^a\log x \mid x > 0, a > 0, a \neq 1}$$

Per definitie geldt:

$$\boxed{y = a^x \to x = {}^a\log y}$$

$y = e^{x \ln a} \to \ln y = a \ln a \to$

$$\boxed{{}^a\log y = \frac{\ln y}{\ln a}}$$

Stel: $x = \varphi(t) \to f(x) = f\{\varphi(t)\} \wedge dx = \varphi'(t)dt \to$

Substitutieregel:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)dt}$$

Substitutie van $t = a + bx$ en $dt = bdx$ in $\int (a+bx)^n dx$ resp. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx}$ resp. $\int \sqrt{a+bx}dx$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C \\ &\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{\ln(a+bx)}{b} + C \\ &\int \sqrt{a+bx}dx = \frac{2(a+bx)\sqrt{a+bx}}{3b} + C \end{aligned}}$$

Substitutie van $t = x/a$ en $dt = dx/a$ in $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ resp. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ resp. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \\ &\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \\ &\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C \end{aligned}}$$

Substitutie van $t = x^2 \pm a^2$ en $dt = 2xdx$ resp. $t = a^2 - x^2$ en $dt = -2xdx$ in $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2}$ resp. $\displaystyle\int \frac{xdx}{a^2-x^2}$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \tfrac{1}{2}\ln(x^2 \pm a^2) + C \\ &\int \frac{xdx}{a^2-x^2} = -\tfrac{1}{2}\ln(a^2-x^2) + C \end{aligned}}$$

Substitutie van $t^2 = x^2 \pm a^2$ en $tdt = xdx$ resp. $t^2 = a^2 - x^2$ en $tdt = -xdx$ in $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ resp. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \\ \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= -\sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}}$$

Substitutie van $t - x = \sqrt{x^2 \pm a^2} \to x = \frac{t^2 \mp a^2}{2t}$ en $\frac{t^2 \pm a^2}{2t^2} dt = dx$ in $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ geeft:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C}$$

Substitutie van $t = a/x$ en $dx = -(a/t^2)dt$ in $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ resp. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ resp. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} &= -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right) + C \\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C \\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C \end{aligned}}$$

<u>Stel</u>: $f(x) = t \to f'(x)dx = dt \to \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{dt}{t} \to \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln t + C \to$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C}$$

Substitutie van $-d\cos x = \sin x dx$ en $d\sin x = \cos x dx$ in $\int \tan x dx$ resp. $\int \cot x dx$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \tan x dx &= -\ln\cos x + C \\ \int \cot x dx &= \ln\sin x + C \end{aligned}}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx/\cos^2 x}{\tan x} = \int \frac{d\tan x}{\tan x} \to$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln\tan x + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2d\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} \rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\tan\tfrac{1}{2}x + C}$$

Substitutie van $t - \frac{1}{2}\pi = x$ en $dt = dx$ in $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ geeft $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\tan\tfrac{1}{2}t + C \rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) + C}$$

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \int \frac{dx}{a(\sin x + \tan\varphi\cos x)} = \int \frac{dx}{a\sin(x+\varphi)/\cos\varphi} = \int \frac{\cos\varphi d(x+\varphi)}{a\sin(x+\varphi)} \;\Big|$$

$a, b \in I\!R$, $\tan\varphi = b/a \rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{\cos\varphi}{a}\ln\tan\tfrac{1}{2}(x+\varphi) + C \;\Big|\; a, b \in I\!R, \tan\varphi = b/a}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x + \sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{1}{2}x} \text{ en } \cos x = \frac{\cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x + \sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{1}{2}x}$$

<u>Stel</u>: $\tan\frac{1}{2}x = t \rightarrow \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \wedge \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \wedge x = 2\arctan t \rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \rightarrow$

Als $R(\sin x, \cos x)$ een *rationale* functie is van $\sin x$ en $\cos x$, dan geldt:

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}$$

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \rightarrow f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \rightarrow$

<u>**Partiële integratieregel**</u>:

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

In differentiaalvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x)}$$

$\int x^m e^x dx = \int x^m de^x = x^m e^x - \int e^x dx^m \mid m \in I\!N^+ \rightarrow$

$$\boxed{\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx \;\Big|\; m \in I\!N^+}$$

$\int x^m e^{-x} dx = -\int x^m de^{-x} = -x^m e^{-x} + \int e^{-x} dx^m \mid m \in I\!N^+ \rightarrow$

$$\boxed{\int x^m e^{-x} dx = -x^m e^{-x} + m\int x^{m-1}e^{-x} dx \;\Big|\; m \in I\!N^+}$$

$\int xe^{mx}dx = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int xde^{mx} = \dfrac{xe^{mx}}{m} - \dfrac{1}{m}\displaystyle\int e^{mx}dx \mid m \in I\!R \rightarrow$

$$\boxed{\int xe^{mx}dx = \frac{xe^{mx}}{m} - \frac{e^{mx}}{m^2} + C \;\Big|\; m \in I\!R}$$

$\int x^m \ln xdx = \displaystyle\int \ln xd\dfrac{x^{m+1}}{m+1} = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int x^{m+1}d\ln x \Leftrightarrow$

$\int x^m \ln xdx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int x^{m+1}\dfrac{dx}{x} \;\Big|\; m \in I\!R\backslash -1 \rightarrow$

$$\boxed{\int x^m \ln xdx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C \;\Big|\; m \in I\!R\backslash -1}$$

Voor $m = -1$ geldt: $\displaystyle\int x^{-1}\ln xdx = \int \ln x\frac{dx}{x} = \int \ln xd\ln x \rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{\ln x}{x}dx = \tfrac{1}{2}\ln^2 x + C}$$

$\int \ln^n xdx = x\ln^n x - \int xd\ln^n x \mid n \in I\!N^+ \rightarrow$

$$\boxed{\int \ln^n xdx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} xdx \mid n \in I\!N^+}$$

$\displaystyle\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{1}{b}\int e^{ax}d\cos bx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx$

Analoog: $\displaystyle\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx \rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bxdx &= \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2+b^2} + C\\ \int e^{ax}\cos bxdx &= \frac{ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2} + C\end{aligned}}$$

$\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\arcsin\frac{x}{a} + \int xd\sqrt{a^2-x^2} \Leftrightarrow$

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\arcsin(x/a) + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx \rightarrow$

Cirkelintegraal:

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\arcsin(x/a) + C}$$

Analoog voor $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$:

$$\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C}$$

$\int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d\cos x = -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x d \sin^{n-1} x \Leftrightarrow$
$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x dx \mid n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$; analoog voor $\int \cos^n x dx \mid n \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx \,\Bigg|\, n \in \mathbb{Z} \\[2ex] \displaystyle\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx \,\Bigg|\, n \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x)dx - \int \tan^{n-2} x dx = \int \tan^{n-2} x d\tan x - \int \tan^{n-2} x dx \mid n \in \mathbb{Z}$;
analoog voor $\int \cot x^{n-2} x dx \mid n \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \,\Bigg|\, n \in \mathbb{Z} \\[2ex] \displaystyle\int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx \,\Bigg|\, n \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \tfrac{1}{2}\int x d\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} = \tfrac{1}{2}x\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2(-n+1)}\int (1+x^2)^{-n+1}dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = -\frac{x}{(2n-2)((1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)((1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{x}{(2n-4)((1+x^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-2}} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-2}} + \cdots + \\[2ex] \displaystyle\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\arctan x + C \,\Bigg|\, n \in \mathbb{N}\backslash 0,1 \end{array}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \int \frac{x^n+1}{x(x^n+1)}dx - \int \frac{x^n}{x(x^n+1)}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx = \ln x - \frac{1}{n}\ln(x^n+1)\Bigg| n \in \mathbb{N}^+ \rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \ln\frac{x}{\sqrt{x^n+1}} + C \,\Bigg|\, n \in \mathbb{N}^+}$$

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \rightarrow$$

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C}$$

Als van $\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx \;\Big|\; a,b,c,p,q \in I\!R$ de nulpunten a_1 en a_2 van de noemer reëel en verschillend zijn, dan geldt: $\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c} = \dfrac{px+q}{a(x-a_1)(x-a_2)} = \dfrac{A_1}{x-a_1} + \dfrac{A_2}{x-a_2} \rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = A_1\int\frac{dx}{x-a_1} + A_2\int\frac{dx}{x-a_2}}$$

Hierin zijn de constanten A_1 en A_2 te bepalen uit $px+q \equiv A_1(x-a_2)+A_2(x-a_1)$ na substitutie voor x van a_1 resp. a_2.

Als de nulpunten reëel en gelijk zijn, dan geldt: $\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c} = \dfrac{p(x-\alpha)}{a(x-\alpha)^2} + \dfrac{B}{a(x-\alpha)^2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{(x-\alpha)^2} \rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = A\int\frac{dx}{x-\alpha} + B\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}}$$

Hierin zijn de constanten A 4n B te bepalen uit $px+q = p(x-\alpha)+B$.

Als de nulpunten niet reëel zijn, dan geldt: $\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \dfrac{B}{ax^2+bx+c} \rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = A\ln|ax^2+bx+c| + B\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Hierin zijn de constanten A en B te bepalen uit $px+q = A(2ax+b)+B$.

$\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = B\int\frac{dx}{a[\{x+(b/2a)\}^2+\{(4ac-b^2)/4a^2\}]} = B\int\frac{dx}{[a\{x+(b/2a)\}^2+k^2]} \Leftrightarrow$

$\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{B}{ak}\arctan\frac{x+(b/2a)}{k} \rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = A\ln|ax^2+bx+c| + \frac{B}{ak}\arctan\frac{x+(b/2a)}{k} + C}$$

Theorema van Rolle: Als een functie $f(x)$ continu is op $[a,b]$, differentieerbaar op $<a,b>$ en $f(a)=f(b)$, dan is er minstens 1 punt $c \in <a,b>$ zo, dat $f'(c)=0$.

Middelwaardestelling: Als een functie $f(x)$ continu is op $[a,b]$ en differentieerbaar op $<a,b>$, dan is er minstens 1 punt $c \in <a,b>$ zo, dat $f'(c) = \{f(b)-f(a)\}/(b-a)$

Als een functie $f(x)$ continu is op $[a,b]$, differentieerbaar op $<a,b>$ en $f'(x)>0$ resp. $f'(x)<0$, dan is f monotoon stijgend resp. dalend op $[a,b]$.

Als de functies $f(x)$ en $g(x)$ continu zijn op $[a,b]$, differentieerbaar op $<a,b>$ en $g(x)\neq 0$, dan is er een punt $c \in <a,b>$ zo, dat $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Stel: $f(a)=g(a)=0 \rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \;\Big|\; x\neq a, \xi \in <a,x> \rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to 0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \to$$

Stelling van l'Hopital: Als de functies $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn in een gereduceerde omgeving van $x = a$, $g'(x) \neq 0$ en $f(a) = g(a) = 0$, dan geldt:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Stel: $y = |x^x|_{x=0} = 0^0 \to \ln y = |x \ln x|_{x=0} = \left[\frac{\ln x}{1/x}\right]_{x=0} = \left[\frac{1/x}{-1/x^2}\right]_{x=0} = [-x]_{x=0} = 0 \to$ $y = 1 \to$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^x = 1}$$

Stel: $y = [(1+m^{-1})^m]_{m=\infty} = 1^\infty \to \ln y = [m\ln(1+m^{-1})]_{m=\infty} = \left[\frac{\ln(1+m^{-1})}{1/m}\right]_{m=\infty} \Leftrightarrow$

$$\ln y = \left[\frac{\frac{1/m^2}{1+m^{-1}}}{-1/m^2}\right]_{m=\infty} = 1 \to y = e \to$$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e}$$

Stel: $y = [m(\sqrt[m]{a}-1)]_{m=\infty} = [m(a^{1/m}-1)]_{m=\infty} = \infty.0 \to y = \left[\frac{a^{1/m}-1}{1/m}\right]_{m=\infty} \Leftrightarrow$

$$y = \left[\frac{(-1/m^2)a^{1/m}\ln a}{-1/m^2}\right]_{m=\infty} = \ln a \to$$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} m(\sqrt[m]{a}-1) = \ln a}$$

Als $f'(a) = 0$ en $f''(a)$ bestaat, dan is $f(a)$ een relatief extreem als $f''(a) \neq 0$, en wel een min. voor $f''(a) > 0$ en een max. voor $f''(a) < 0$.

Als $f''(x)$ in een punt $c \in < a, b >$ van teken wisselt, dan is $f(c)$ een **buigpunt** en heeft $f(x)$ hier een **buigraaklijn**.

Regel van Leibniz: Als $u(x)$ en $v(x)$ n keer differentieerbare functies zijn, dan geldt voor de n-de afgeleide van het produkt van $u(x)$ en $v(x)$:

$$\boxed{D_x^{(n)}\{u(x)v(x)\} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_x^{(n-k)}u(x)D_x^{(k)}v(x)}$$

Een **oneigenlijke integraal van de 1-ste soort** wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt}$$

Eerste majorantencriterium: Als voor $t \geq a$ geldt dat $0 \leq f(t) \geq g(t)$ en $\int\limits_a^\infty g(t)dt$ is convergent, dan is $\int\limits_a^\infty f(t)dt$ ook convergent.

Is $\int\limits_a^\infty f(t)dt$ divergent, dat is $\int\limits_a^\infty g(t)dt$ ook divergent.

Als vanaf $t = a$ geldt dat $f(t) > 0$ en $g(t) > 0$ en is $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} > 0$, dan zijn $\int\limits_a^\infty f(t)dt$ en $\int\limits_a^\infty g(t)dt$ beide convergent of beide divergent.

Stel: $g(t) = \dfrac{1}{t^p} \to \displaystyle\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t^p} = \begin{cases} [x^{1-p} - a^{1-p}]/[1-p] & | \, p > 1 \\ \infty & | \, p \leq 1 \end{cases} \longrightarrow$

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)t^p > 0$ bestaat $\Rightarrow \int\limits_a^\infty f(t)dt$ is convergent voor $p > 1$ en divergent voor $p \leq 1$.

Tweede majorantencriterium: Als $g(t) \geq 0$ en vanaf $t = a$ geldt dat $-g(t) \leq f(t) \leq g(t)$, dan is $\int\limits_a^\infty f(t)dt$ convergent als $\int\limits_a^\infty g(t)dt$ convergent is.

Als de functie $f(t)$ singulier is in $t = b$ dan wordt de **oneigenlijke integraal van de 2-de soort** gedefinieerd als:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{x\uparrow b} \int\limits_a^x f(t)dt}$$

De **elliptische integraal van de 1-ste soort** is van de vorm $\displaystyle\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \,\Bigg|\, 0 < k < 1$

De integrand is te schrijven als een convergente machtreeks die term voor term geïntegreerd kan worden: $\displaystyle\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \varphi + \tfrac{1}{2}k^2 \int\limits_0^\varphi \sin^2\varphi d\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi d\varphi + \cdots$

Uit $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p}\varphi d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2p} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$ volgt dan de zgn. **complete integraal**:

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1 + (\tfrac{1}{2})^2k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\} \,\Bigg|\, 0 < k < 1}$$

De **elliptische integraal van de 2-de soort** is van de vorm $\displaystyle\int\limits_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \mid 0 < k < 1$

De integrand is te schrijven als een convergente machtreeks die term voor term geïntegreerd kan worden: $\int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi = \varphi - \frac{1}{2}k^2 \int\limits_0^{\varphi} \sin^2\varphi d\varphi - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{k^4}{3}\int\limits_0^{\varphi}\sin^4\varphi d\varphi - \cdots$

Voor $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ volgt hieruit voor de complete integraal:

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1-(\tfrac{1}{2})^2k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \cdots\right\} \;\Bigg|\; 0<k<1}$$

Een **aftelbare verzameling** is een verz. die gelijkmachtig is met de verz. $I\!N$, d.w.z. een verz. waarvan de elmenten één-eenduidig corresponderen met $I\!N$.

Een **rij** is een functie die gedefinieerd is op een verz. van gehele getallen.

<u>**Eerste limietstelling van Cauchy**</u>: Als voor de rij $\{u_n\}$ de $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)$ bestaat, dan bestaat ook de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n}$ en geldt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)}$$

<u>**Tweede limietstelling van Cauchy**</u>: Als $u_n > 0$ is en voor de rij $\{u_n\}$ bestaat de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, dan bestaat ook de $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ en geldt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

De rij met complexe termen $\{u_n\}$ heeft alleen dan een limiet als zowel de rij der reële delen $\{u_n\}$ als die der imaginaire delen $\{v_n\}$ een limiet heeft.

De n-de partiële som S_n van een rij $\{u_n\}$ wordt gedefinieerd als de som van de eerste n termen: $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

De rij van de partiële sommen $\{S_n\}$ heet de bij $\{u_n\}$ behorende **reeks**.

Een *noodzakelijke voorwaarde* voor convergentie van een reeks is dat de algemene term u_n tot nul nadert: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

De **meetkundige reeks** wordt gedefinieerd als: $\dfrac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} \to$

$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}$; $|x|<1 \wedge n \in I\!N^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x} = 0 \to$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = \frac{1}{1-x} \;\Big|\; |x|<1}$$

De **Harmonische reeks** HR is een divergente reeks van de vorm:

$$\boxed{\mathrm{HR} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}$$

De **hyperharmonische reeks** HHR is een reeks van de vorm:

$$\boxed{\mathrm{HHR} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}}$$

De HHR is convergent voor $p > 1$ en divergent voor $p \leq 1$. Als $\sum u_n$ een reeks met pos. en neg. termen is, dan vormt $\sum |u_n|$ de reeks der absolute waarden.
Als $\sum |u_n|$ convergent (divergent) is, dan heet $\sum u_n$ **absoluut convergent** resp. **absoluut divergent**.
Een absoluut convergente reeks is convergent; een absoluut divergente reeks kan convergent of divergent zijn.
Een **alternerende reeks** is een reeks met afwisselend pos. en neg. termen.

<u>Kenmerk van Leibniz</u>: Een alternerende reeks waarvan de termen in absolute waarde monotoon tot nul naderen is convergent.

Een absoluut convergente reeks met complexe termen is convergent.

Als $s_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ en $s_2 = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ 2 absoluut convergente reeksen zijn, dan is de produktreeks gelijk aan $s_1 s_2 = w_0 + w_1 + w + 2 + \cdots$ met
$w_0 = u_0 v_0$
$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0$
$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0$
....
$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$

Een **machtreeks** is een reeks van de vorm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$; deze kan d.m.v. een transformatie van $O(0,0)$langs de X-as herleid worden tot de vorm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergeert voor $x = x_0$, dan is deze absoluut convergent voor elke x waarvoor geldt dat $|x| < |x_0|$.

Als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ divergeert voor $x = x_0$, dan is deze divergent voor elke x waarvoor geldt dat $|x| > |x_0|$.

Een machtreeks die convergent is voor $x = a$ is dus convergent op $< -a, a]$; dit heet het **convergentie-interval** dat als uiterste kan bestaan uit het punt O of uit $< -\infty, \infty >$. Voor tussenliggende intervallen heeft de verz. $\{a\}$ een kleinste bovengrens, de zgn. **convergentie-straal** ρ. De machtreeks is dus convergent op $< -\rho, \rho >$ en divergent buiten $[-\rho, \rho]$.

Delen door een oneindige reeks kan alleen als de reeks een machtreeks is, daar de deling dan geschreven kan worden als een binomiaalreeks.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right)$$

Daar het rechterlid voor elke eindige waarde van x convergeert en voor $x \in < -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi >$ geldt dat $\cos x \in < 0; 1 >$, is $\left| -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right| < 1$ voor $x \in < -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi > \rightarrow$

$$\frac{1}{\cos x} = \{1 + A(x)^{-1}\} = 1 - A(x) + \{A(x)\}^2 - \{A(x)\}^3 + \cdots \;\Big|\; A = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)^3 + \cdots \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots + \frac{x^4}{2!2!} - \frac{2x^6}{2!4!} + \cdots + \frac{x^6}{2!2!2!} - \cdots + \cdots \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = x\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)\right\}$$

Daar het rechterlid voor elke eindige waarde van x convergeert en voor $x \in < 0; \pi >$ geldt dat $\sin x \in < 0; 1 >$, is $\left|-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right| < 1$ voor $x \in < 0; \pi > \rightarrow$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}\left\{1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots\right) + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^3 + \cdots\right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}\left\{1 + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \cdots + \frac{x^4}{3!3!} - \frac{2x^6}{3!5!} + \cdots + \frac{x^6}{3!3!3!} - \cdots + \cdots\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \cdots}$$

Het oneindig produkt $\prod_{i=0}^{\infty} u_i$ is convergent als $\lim_{n\to\infty} u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$ bestaat en niet nul en eindig is, ofwel als $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Het oneindig produkt $\prod_{i=0}^{\infty}(1 \pm \alpha_i)$ is convergent als $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|$ convergeert.

Volgens de Stelling van de Moivre geldt: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^p = \cos p\alpha + i\sin p\alpha$

Tevens geldt: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^p = \cos^p\alpha + ip\cos^{p-1}\alpha\sin\alpha - \frac{p(p-1}{2!}\cos^{p-2}\alpha\sin^2\alpha - \cdots + i^p\sin^p\alpha$

Vergelijking van de beide reële - en imaginaire delen geeft:

$$\begin{cases} \cos p\alpha = \cos^p\alpha - \dfrac{p(p-1}{2!}\cos^{p-1}\alpha\sin^2\alpha + \cdots \\[2ex] \sin p\alpha = p\cos^{p-1}\alpha\sin\alpha - \dfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}\cos^{p-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots \end{cases}$$

De 2-de vergelijking is te schrijven als:

$$\sin p\alpha = \sin\alpha\left\{p\cos^{p-1}\alpha - \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\cos^{p-3}\alpha\sin^2\alpha + \cdots\right\}$$

Stel: $p = 2q+1 \mid q \in I\!N \rightarrow i^p \in \mathbb{C} \rightarrow$ De laatste term binnen de accolades is $\sin^{p-1}\alpha = \sin^{2q}\alpha$. Daar alle machten van $\cos\alpha$ even exponenten bezitten, kunnen ze geschreven worden als machten van $1-\sin^2\alpha$, zodat de uitdrukking tussen de accoladess een gehele rationale functie van $\sin^2\alpha$ van de q-de graad is waarvan de wortels, als ze nul gesteld wordt, te schrijven zijn als: $\beta_1^2, \beta_2^2, \ldots, \beta_q^2 \rightarrow$

$$\sin p\alpha = \sin\alpha\{(\beta_1^2-\sin^2\alpha)(\beta_2^2-\sin^2\alpha)\ldots(\beta_q^2-\sin^2\alpha)\}$$

$$p\alpha = n\pi \mid n \in I\!N^+ \Rightarrow \sin p\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \cdots, \frac{q\pi}{p} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1^2-\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta_1^2 = \sin^2(\pi/p) \\ \beta_2^2-\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta_2^2 = \sin^2(2\pi/p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_q^2-\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta_q^2 = \sin^2(q\pi/p) \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\sin p\alpha = \sin\alpha\left\{\left(\sin^2\frac{\pi}{p}-\sin^2\alpha\right)\ldots\left(\sin^2\frac{q\pi}{p}-\sin^2\alpha\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\sin p\alpha = \sin\alpha\left\{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\pi/p)}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(q\pi/p)}\right)\right\}$$

Stel: $p\alpha = x \rightarrow \alpha = \dfrac{x}{p} \rightarrow \sin\alpha = \sin\dfrac{x}{p} = \dfrac{x}{p} - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{x}{p}\right)^3 + \cdots \rightarrow p \gg 1 \Rightarrow \sin\dfrac{x}{p} \approx \dfrac{x}{p} \rightarrow$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\pi/p)} = \frac{\sin^2(x/p)}{\sin^2(\pi/p)} \approx \frac{(x/p)^2}{(\pi/p)^2} = \frac{x^2}{\pi^2} \wedge \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(2\pi/p)} = \frac{\sin^2(x/p)}{\sin^2(2\pi/p)} \approx \frac{(x/p)^2}{(2\pi/p)^2} = \frac{x^2}{2\pi^2}\ldots \rightarrow$$

$$\sin x = \sin\frac{x}{p}\left\{\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\ldots\right\}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \sin\frac{x}{p} \approx x \rightarrow$$

$$\boxed{\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}$$

Substitutie van $x = \frac{1}{2}\pi$ geeft:

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3^2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\tfrac{35}{35}\cdots \rightarrow$$

Produkt van Wallis:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots}}$$

Analoog geldt voor $\cos p\alpha$ (met $p = 2q \mid q \in I\!N^+$):
$\cos p\alpha = (\beta_1^2-\sin^2\alpha)(\beta_2^2-\sin^2\alpha)\ldots(\beta_q^2-\sin^2\alpha)$

$$p\alpha = (n+\tfrac{1}{2}\pi) \mid n \in I\!N \Rightarrow \cos p\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2}\pi}{p}, \frac{1\frac{1}{2}\pi}{p}, \cdots, \frac{(q-\frac{1}{2})\pi}{p} \rightarrow$$

$$\cos p\alpha = \left(\sin^2\frac{\frac{1}{2}\pi}{p}-\sin^2\alpha\right)\left(\sin^2\frac{1\frac{1}{2}\pi}{p}-\sin^2\alpha\right)\cdots\left(\sin^2\frac{(q-\frac{1}{2})\pi}{p}-\sin^2\alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos p\alpha = \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\frac{1}{2}\pi/p)}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2[(q-\frac{1}{2})\pi/p]}\right)$$

Substitutie van $x = p\alpha$ geeft:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{(\frac{1}{2}\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(1\frac{1}{2}\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\frac{1}{2}\pi)^2}\right)\cdots \rightarrow$$

$$\boxed{\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \frac{x^2}{\{(2k-1)\frac{1}{2}\pi\}^2}\right]}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx + \tfrac{1}{2}\int_0^x x^2dx + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\int_0^x x^4dx + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\int_0^x x^6dx + \cdots \rightarrow$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \quad \Big| \quad |x| < 1}$$

Uit $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$ volgt:

$$\boxed{\arccos x = \tfrac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} - \cdots \quad \Big| \quad |x| < 1}$$

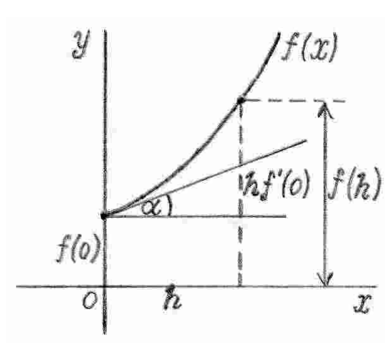
$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2dx + \int_0^x x^4dx - \int_0^x x^6dx + \cdots \rightarrow$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \Big| \quad |x| < 1}$$

Substitutie van $x = 1$ in de reeks van $\arctan x$ resp. $x = \frac{1}{2}$ in de reeks van $\arcsin x$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\ \frac{\pi}{2} &= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots \\ \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots \end{aligned}}$$

De functiewaarde in het punt $x = h$ van $y = f(x)$ is in eerste benadering te schrijven als: $f(h) \approx f(0) + h\tan\alpha = f(0) + hf'(0)$
Een tweede benadering volgt uit de identiteit:



$$f(h) = f(0) + \int_0^t f'(t)dt = f(0) - \int_0^h f'(t)d(h-t) \rightarrow$$

$$f(h) = f(0) - [f'(t)(h-t)]_0^h + \int_0^h f''(t)(h-t)dt \Leftrightarrow$$

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \int_0^h f''(t)(h-t)dt$$

Als $f(x)$ voldoende vaak differentieerbaar is, dan volgt door herhaalde partiële integratie de

Formule van MacLaurin:

$$\boxed{f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(h)}$$

Hierin is $R_n(h) = (n!)^{-1}\int\limits_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ de restterm.

Stel: $F'(t) = (n!)^{-1}(h-t)^n f^{(n+1)}(t) \rightarrow$

$R_n(t) = \int\limits_0^h F'(t)dt = F(h) - F(0) = hF'(\theta h) | 0 < \theta < 1 \rightarrow R_n(h) = (n!)^{-1}h(h-\theta h)^n f^{(n+1)}(\theta h) \rightarrow$

Restterm van Cauchy:

$$\boxed{R_n(h) = (1-\theta)^n \frac{h^{(n+1)}}{n!} f^{(n+1)}(\theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1}$$

Stel: $h > 0$ en $f^{(n+1)}$ continu in $[0, h]$ met een min. m en max. M

Daar $(h-t)^n \geq 0$ op $[0, h]$ volgt dan dat $(n!)^{-1}\int\limits_0^h m(h-t)^n dt \leq R_n(h) \leq (n!)^{-1}\int\limits_0^h M(h-t)^n dt \rightarrow$

$\dfrac{mh^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(h) \leq \dfrac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$

Uit de tussenwaardestelling volgt dan dat $f^{(n+1)}$ elke waarde tussen m en M minstens 1 keer aanneemt $\rightarrow$ op $[0, h]$ is een getal $\xi = \theta h$ zo, dat geldt:

$$\boxed{R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1}$$

Dit is de **Restterm van Lagrange**.

Stel: $f(a+h) = \varphi(h) \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = f(a) \wedge \varphi'(0) = f'(a) \wedge \ldots \wedge \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(a) \wedge \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(a+t) \\ \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n(h) \end{array}\right\} \rightarrow$$

Formule van Taylor:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(h)}$$

Substitutie van $a = 0$ en $h = x$ geeft:

$$\boxed{f(x) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(h)}$$

Voor de afgeleide van een machtreeks $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \mid |x| < \rho$ geldt:

$f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} \mid |x| < \rho$

Daar $f'(x)$ weer een machtreeks is, is deze weer differentieerbaar $\rightarrow$
Een machtreeks is op $< -\rho, \rho >$ onbeperkt vaak differentieerbaar. De integraal van $f(x)$ is gelijk aan: $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n x^{n+1}}{n+1} \Bigg| \; |x| < \rho$

Een machtreeks kan dus term voor term gedifferentieerd en geïntegreerd worden.

Uit $D_x[e^x]_{x=0} = D_x^2[e^x]_{x=0} = \ldots = D_x^n[e^x]_{x=0} = 1$ volgt:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

Substitutie van x door $x \ln a$ geeft:

$$\boxed{a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \cdots}$$

Uit $D_x^n[\sin x]_{x=0} = [\sin(x + \frac{1}{2}n\pi)]_{x=0}$ en $D_x^n[\cos x]_{x=0} = [\cos(x + \frac{1}{2}n\pi)]_{x=0}$ volgt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \end{array}}$$

Daar $\ln x$ en zijn afgeleiden voor $x = 0$ oneindig groot worden, is $\ln x$ niet in een Taylorreeks te ontwikkelen. Voor $|x| < 1$ is dit wel mogelijk voor $\ln(1 + x)$.
Uit $D_x^n[\ln(1 + x)]_{x=0} = [(-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}]_{x=0} = (-1)^{n-1}(n - 1)!$ volgt:

$$\boxed{\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots \mid |x| < 1}$$

Substitutie van $x = 1$ geeft de **Reeks van Broucker**:

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots}$$

Aftrekking van $\ln(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ van $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - + \cdots$ geeft:

$\ln \dfrac{1 + x}{1 - x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots)$

Stel: $z = \dfrac{1 + x}{1 - z} \rightarrow z = \dfrac{z - 1}{z + 1} \rightarrow$

$$\boxed{\ln z = 2 \left\{ \frac{z - 1}{z + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^5 + \cdots \right\}}$$

Stel: $\dfrac{1 + x}{1 - x} = \dfrac{a + z}{a} \Bigg| \; a > 0 \rightarrow x = \dfrac{z}{2a + z} \rightarrow$

$$\boxed{\ln(a + z) = \ln a + 2 \left\{ \frac{z}{2a + z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2a + z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2a + z} \right)^5 + \cdots \right\}}$$

$D_x^n[(1+x)^m]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}]_{x=0} \Leftrightarrow$
$D_x^n[(1+x)^m]_{x=0} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) \rightarrow$

Binomiaalreeks:

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots \;\Big|\; |x| < 1}$$

Voor $x = 1$ en $m = -1$ volgt hieruit de **<u>Reeks van Euler</u>**:

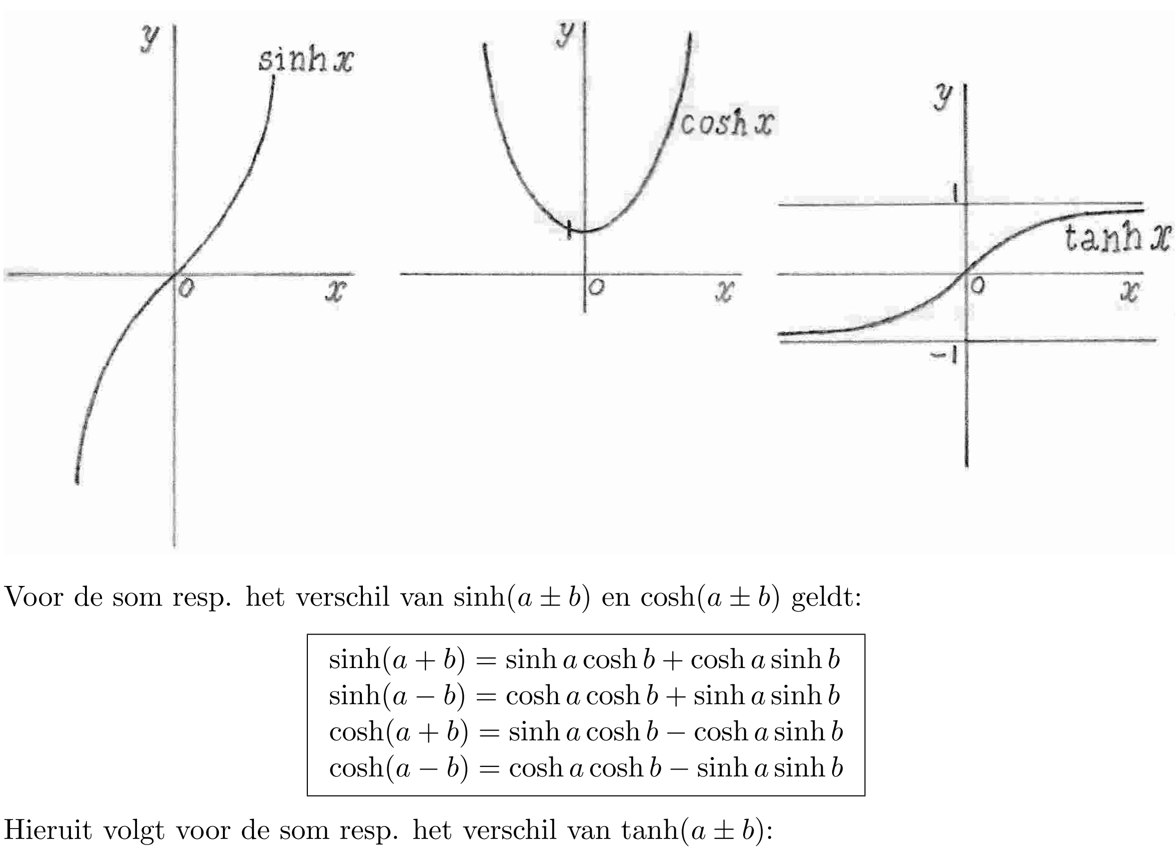
$$\boxed{\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots}$$

De **sinus hyperbolicus** $\sinh x$ resp. **cosinus hyperbolicus** $\cosh x$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - x^{-x}) \\[4pt] \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + x^{-x}) \end{array}}$$

De **tangens hyperbolicus** wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$



Voor de som resp. het verschil van $\sinh(a \pm b)$ en $\cosh(a \pm b)$ geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \\ \sinh(a-b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \cosh(a+b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \\ \cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \end{array}}$$

Hieruit volgt voor de som resp. het verschil van $\tanh(a \pm b)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \\ \tanh(a-b) = \dfrac{\tanh a - \tanh b}{1 - \tanh a \tanh b} \end{array}}$$

Uit $b = a$ volgen de verdubbelingsformules:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sinh 2a = 2\sinh a\cosh a\\ \cosh 2a = \sinh^2 a + \cosh^2 a\\ \tanh 2a = \dfrac{2\tanh a}{1+\tanh^2 a}\end{array}}$$

Uit $\cosh 0 = 1$ volgt tevens:

$$\boxed{\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1}$$

Substitutie van $z = ia \mid a \in I\!R$ in $\sin z = \frac{1}{2}i^{-1}(e^{iz} - e^{-iz})$ en $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ geeft: $\sin ia = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$ resp. $\cos ia = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin ia = i\sinh a\\ \cos ia = \cosh a\end{array}}$$

Hieruit volgt voor $\tan ia$:

$$\boxed{\tan ia = i\tanh a}$$

Uit de definitie van de hyperbolische functies volgt voor hun afgeleide:

$$\boxed{\begin{array}{l}D_x\sinh x = \cosh x\\ D_x\cosh x = \sinh x\\ D_x\tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}\end{array}}$$

Hieruit volgt voor de onbepaalde integraal:

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int\sinh x dx = \cosh x + C\\ \displaystyle\int\cosh x = \sinh x + C\\ \displaystyle\int\frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C\end{array}}$$

Substitutie van $d\cosh x = \sinh x dx$ en $d\sinh x = \cosh x dx$ in $\int\tanh x dx$ resp. $\int\operatorname{cotanh} x dx$ geeft:

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int\tanh x dx = \ln\cosh x + C\\ \displaystyle\int\operatorname{cotanh} x dx = \ln\sinh x + C\end{array}}$$

$$\int\frac{dx}{\sinh x\cosh x} = \int\frac{dx/\cosh^2 x}{\tanh x} = \int\frac{d\tanh x}{\tanh x} \rightarrow$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sinh x\cosh x} = \ln\tanh x + C}$$

$$\int\frac{dx}{\sinh x} = \int\frac{2d\frac{1}{2}x}{2\sinh\frac{1}{2}x\cosh\frac{1}{2}x} \rightarrow$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sinh x} = \ln\tanh\tfrac{1}{2}x + C}$$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{d^x dx}{e^{2x}+1} = 2\int \frac{de^x}{e^{2x}+1} \rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cosh x} = 2\arctan e^x + C}$$

$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

Aftrekking resp. optelling van $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$ en $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \cdots$ geeft:

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}}$$

De inverse van $\sinh x$ wordt op $I\!R$ gedefinieerd als de **area sinus hyperbolicus** x:

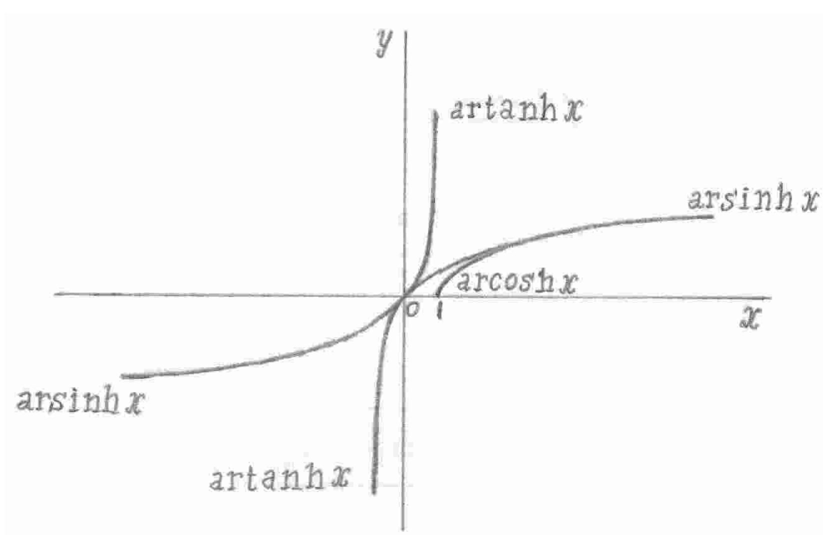
$$\boxed{\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2-1} \rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$
De inverse van $\cosh x$ wordt op $[0, \rightarrow>$ gedefinieerd als de **area cosinus hyperbolicus** x:

$$\boxed{\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})}$$

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \rightarrow ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$
De inverse van $\tanh x$ wordt op $< -1, 1 >$ gedefinieerd als de **area tangens hyperbolicus** x:

$$\boxed{\operatorname{artanh} x = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}$$



Uit de definitie van de inverse hyperbolische functies volgt voor hun afgeleide:

$$\boxed{\begin{aligned} D_x \operatorname{arsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ D_x \operatorname{arcosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ D_x \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}}$$

Een functie $f(x,y)$ van 2 variabelen is een voorschrift waarbij aan elk element van (een deelverz. van) $I\!R \times I\!R$ op éénduidige wijze een reëel getal wordt toegevoegd:
$f : (x,y) \to z = f(x,y)$
Een functie $f(x,y)$ gedefinieerd in een gereduceerde omgeving van (x_0,y_0) heeft voor $(x,y) \to (x_0,y_0)$ de limiet L als bij elke $\varepsilon > 0$ een δ bestaat zo, dat $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ als $0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$, waarbij L onafhankelijk moet zijn van de wijze waarop (x,y) naar (x_0,y_0) nadert.

Een functie $f(x,y)$ gedefinieerd in een omgeving van (x_0,y_0) is continu in (x_0,y_0) als geldt: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

De **partiële afgeleide** $f_x(x,y)$ resp. $f_y(x,y)$ van een functie $f(x,y)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \end{aligned}}$$

Voor de 2-de partiële afgeleiden geldt:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

Een functie $f(x,y)$ is (totaal) differentieerbaar in (x_0,y_0) als er functies φ en ψ bestaat continu in (x_0,y_0) zo, dat geldt: $f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x-x_0)\varphi(x,y) + (y-y_0)\psi(x,y)$

Stel: $y = y_0 \to \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \varphi(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_0}$

Stel: $x = x_0 \to \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \psi(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y_0}$

De **totale differentiaal** df van $f(x,y)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{df = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Hierin is $df = f(x+h,y+k) - f(x,y)$.

De **richtingsafgeleide** $\partial f/\partial\alpha$ in de richting α van $f(x,y)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(x_0 + \rho\cos\alpha, y + 0 + \rho\sin\alpha) - f(x_0,y_0)}{\rho}}$$

Hierin is $h = \rho\cos\alpha$, $k = \rho\sin\alpha$ en $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$.

Als $f(x,y)$ totaal differentieerbaar is, dan bestaan er functies φ en ψ continu in (x_0, y_0) zo, dat geldt:

$$\begin{aligned} f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) - f(x_0,y_0) =& \rho\cos\alpha\varphi(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) + \\ & \rho\sin\alpha\psi(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha) - f(x_0,y_0)}{\rho} =& \rho\cos\alpha\lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)}{\rho} + \\ & \rho\sin\alpha\lim_{\rho\to 0}\frac{\psi(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)}{\rho} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha}$$

Een functie $f(x_1, \ldots, x_m)$ is homogeen van de n-de graad als geldt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1, \ldots, x_m) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_m)}x_m = n\lambda^{n-1}f(x_1, \ldots, x_m)$$

Voor $\lambda = 1$ volgt hieruit de **Stelling van Euler**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = n\lambda^{n-1}f(x_1, \ldots, x_m)}$$

Middelwaardestelling voor een functie van 2 veranderlijken: Als $f(x,y)$ gedefinieerd is op een deelgebied G van $I\!R \times I\!R$ met $A(x_0, y_0)$ en $B(x_0+h, y_0+k)$ punten in G en de rechte lijn tussen A en B geheel in G ligt, dan is er minstens 1 getal $\theta \in < 0, 1 >$ zo, dat geldt: $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$

Stel: $F(t) = f(x_0+ht, y_0+kt) \rightarrow$

$$F'(t) = hf_x + kf_y \equiv \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+ht, y_0+kt)$$

$$F''(t) = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy} \equiv \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+ht, y_0+kt)$$

....

$$F^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+ht, y_0+kt)$$

Substitutie in de formule van MacLaurin geeft de formule van Taylor voor een functie van 2 veranderlijken $z = f(x,y)$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) =& f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots + \\ & \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x_0,y_0) + R_n(h,k) \end{aligned}}$$

Hierin is $R_n(h,k) = \dfrac{1}{n!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \;\Big|\; 0 < \theta < 1$

Als $F^*(t) = F\{f(t), g(t)\}$ een samengestelde functie is van $x = f(t)$ en $y = g(t)$, dan geldt voor de afgeleide functie van $F^*(t)$:

$$\boxed{\frac{dF^*}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dg}{dt}}$$

Substitutie van $z = F(x, y)$ geeft:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Als $f^*(u, v) = f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\}$ een samengestelde functie is van $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$, dan geldt voor de afgeleide functie van $f^*(u, v)$:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f^*}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}}$$

Substitutie van $z = f(x, y)$ geeft:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}}$$

Als u en v uit $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$ zijn op te lossen, dan geldt: $u = g(x, y)$ en $v = h(x, y) \to z = f^*\{g(x, y), h(x, y)\} = f(x, y) \to$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{cases}}$$

Differentiatie van $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$ naar x resp. y geeft:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ 1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$$

De **functionaaldeterminant** ofwel **Jacobiaan** J wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}}$$

Als $J \neq 0$, dan volgt hieruit voor $\partial g/\partial z$, $\partial h/\partial x$, $\partial g/\partial y$ en $\partial h/\partial y$:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial \psi/\partial v}{J} \quad \wedge \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \psi/\partial u}{J} \quad \wedge \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi/\partial v}{J} \quad \wedge \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \varphi/\partial u}{J}}$$

Stel: $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx \to \dfrac{I(\alpha+k)-I(\alpha)}{k} = \int\limits_a^b \dfrac{f(x,\alpha+k)-f(x,\alpha)}{k}dx \Leftrightarrow$

$\dfrac{I(\alpha+k)-I(\alpha)}{k} \approx \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial\alpha}dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}dx \to$

$$\boxed{\frac{dI}{d\alpha} = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}dx}$$

Als a en b ook van α afhangen, dan geldt: $\dfrac{dI}{d\alpha} = \dfrac{\partial I}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial I}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial I}{\partial\alpha}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial\alpha}$

Substitutie van $\left[\dfrac{\partial I}{\partial x}\right]_{x=b} = f(b)$ en $\left[\dfrac{\partial I}{\partial x}\right]_{x=a} = -f(a)$ geeft:

$$\boxed{\frac{dI}{d\alpha} = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}dx + f(b)\frac{db}{d\alpha} - f(a)\frac{da}{d\alpha}}$$

$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx = -\dfrac{1}{\alpha}[e^{-\alpha x}]_0^\infty = \dfrac{1}{\alpha} \to \dfrac{dI}{d\alpha} = -\int\limits_0^\infty xe^{-\alpha x}dx = -\dfrac{1}{\alpha^2} \to$

$\dfrac{d^2I}{d\alpha^2} = \int\limits_0^\infty x^2e^{-\alpha x}dx = \dfrac{2}{\alpha^3}\ldots \to$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad\Big|\quad n \in I\!N^+}$$

$I(a,b) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \dfrac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \dfrac{1}{a^2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \dfrac{d\tan x}{1+(b^2/a^2)\tan^2 x} = \dfrac{1}{ab}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \dfrac{d(b/a)\tan x}{1+(b^2/a^2)\tan^2 x} \Leftrightarrow$

$I(a,b) = \dfrac{1}{ab}\left[\arctan\left\{\dfrac{b}{a}\tan x\right\}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \to$

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}}$$

$\dfrac{dI}{da} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \dfrac{-2a\cos^2 x dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = -\dfrac{\pi}{2a^2b}$ en $\dfrac{dI}{db} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \dfrac{-2b\sin^2 x dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = -\dfrac{\pi}{2ab^2} \to$

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

Een **impliciete functie** van 1 veranderlijke is van de vorm: $F(x,y)=0 \rightarrow$

$y=f(x) \Rightarrow F\{x,f(x)\}=0 \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{df}{dx}=0 \rightarrow$

$$\boxed{\frac{df}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx}\right)\frac{df}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2=0 \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2 f}{dx^2}=0}$$

Een impliciete functie van 2 veranderlijken is van de vorm: $F(x,y,z)=0 \rightarrow$

$z=f(x,y) \Rightarrow F\{x,y,f(x,y)\}=0 \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \wedge \dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad\wedge\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}}$$

<u>Stel</u>: $\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{array}\right. \;\Big|\; y=f(x) \;\wedge\; z=g(x) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} F\{x,f(x),g(x)\}=0 \\ G\{x,f(x),g(x)\}=0 \end{array}\right. \quad \rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dg}{dx}=0 \;\wedge\; \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{dg}{dx}=0$$

Als $J=\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial G}{\partial z}-\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial G}{\partial y}\neq 0$, dan volgt hieruit voor $\dfrac{df}{dx}$ en $\dfrac{dg}{dx}$:

$$\boxed{\frac{df}{dx}=\frac{\partial(F,G)/\partial(z,x)}{J} \quad\wedge\quad \frac{dg}{dx}=\frac{\partial(F,G)/\partial(x,y)}{J}}$$

Een noodzakelijke voorwaarde opdat de impliciet door $F(x,y)=0$ bepaalde functie $y=f(x)$ een extreem bezit in x_0 volgt uit: $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_0}=0 \rightarrow \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}=0$

$f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x_0)$ is een relatief max.
$f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x_0)$ is een relatief min.

$f''(x_0)$ volgt uit substitutie van $f'(x_0)$ in de uitdrukking voor $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{df}{dx}\right)=0$:

$$\boxed{f''(x_0)=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}}$$

Een functie $z=f(x,y)$ heeft een extreem in (x_0,y_0) als geldt: $f_x(x_0,y_0)=0 \wedge f_y(x_0,y_0)=0$
Dit zijn *noodzakelijke* voorwaarden; dergelijke punten heten **stationaire punten**.

Uit $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)\} + \varepsilon r^2$ met $r = \sqrt{h^2+k^2} \wedge r \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$ volgt dan dat het gedrag van $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ vnl. bepaald wordt door de kwadratische vorm tussen de accolades. Er geldt nu:
$f(x_0, y_0)$ is een extreem als $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$, en wel een
max. als $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (ofwel $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$)
min. als $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (ofwel $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$)

Stel: $f : (x, y) \to f(x, y)$ met nevenvoorwaarde: $\varphi(x, y) = 0$

$\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow y = y^*(x) \to \varphi\{x, y^*(x)\} = 0 \wedge f\{x, y^*(x)\} = f^*(x) \to$

$$\frac{df^*}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{df^*}{dx} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy^*}{dx} = 0 \to \frac{dy^*}{dx} = -\frac{\partial \varphi/\partial x}{\partial \varphi/\partial y} \to$$

$$\frac{df^*}{dx} = -\frac{(\partial f/\partial x)(\partial \varphi/\partial y) - (\partial f/\partial y)(\partial \varphi/\partial x)}{\partial \varphi/\partial y} \to$$

Noodzakelijke voorwaarde opdat $\dfrac{df^*}{dx} = 0$ is: $\begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial \varphi/\partial x & \partial \varphi/\partial y \end{vmatrix} = 0$

Stel: $F(x, y, z) = 0 \mid z = f(x, y) \to$ noodzakelijke voorwaarden voor een extreem zijn: $\partial f/\partial x = 0 \quad \wedge \quad \partial f/\partial y = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \to$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Substitutie van $\partial f/\partial x = 0$ en $\partial f/\partial y = 0$ geeft:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F/\partial x^2}{\partial F/\partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F/\partial x \partial y}{\partial F/\partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial z}}$$

Stationaire punten zijn ook m.b.v. de **Lagrange Multiplicatorenmethode** te bepalen.
Stel: $f : (x, y) \to f(x, y) \quad \wedge \quad \varphi(x, y) = 0 \mid y = y^*(x) \to f^*(x) = f\{x, y^*(x)\}$
De functie $w^*(x) = w\{x, y^*(x)\} = f\{x, y^*(x)\} + \lambda\varphi\{x, y^*(x)\}$ met $\lambda \in I\!R$ een zgn. multiplicator, heeft dezelfde extremen als $f^*(x) \to$

$$\frac{dw^*}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy^*}{dx} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy^*}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy^*}{dx} = 0$$

Als λ zo bepaald wordt dat de term tussen haken nul is, dan zijn de 1-ste 2 termen ook nul. Samen met de nevenvoorwaarde geeft dat 3 vergelijkingen met 3 onbekenden, waaruit x en y zijn op te lossen:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \wedge \quad \varphi(x, y) = 0}$$

Een **lijnintegraal** is een integraal waarvan de integrand een scalaire functie gedefinieerd op een kromme in R_2 of R_3 is.
Een kromme $K : \vec{r}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ is **georiënteerd** als op K een pos. richting gedefinieerd is.
Stel: $f : (x, y, z) \to f(x, y, z)$ is een continue functie van $\mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}$, gedefinieerd op K.
Voor de lijnintegraal van f langs K naar x geldt dan:

$$\boxed{\int_K f(x, y, z)dx = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\}\dot{X}(t)dt}$$

Analog uitdrukkingen gelden voor de lijnintegraal naar y en z; voor de lijnintegraal naar de booglengte σ geldt, met $\sigma = s(t)$:

$$\boxed{\int_K f(x, y, z)d\sigma = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\}\dot{s}(t)dt}$$

Eigenschappen van lijnintegralen:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_K cf(x, y, z)dx = c\int_K f(x, y, z)dx \;\Big|\; c \in I\!R \\
\displaystyle\int_K f(x, y, z)dx + \int_K g(x, y, z)dx = \int_K \{f(x, y, z) + g(x, y, z)\}dx \\
\displaystyle\int_K f(x, y, z)dx = -\int_{K^-} f(x, y, z)dx \\
\displaystyle\int_K f(x, y, z)dx = \int_{K_1} f(x, y, z)dx + \int_{K_2} f(x, y, z)dx \;\Big|\; K = K_1 + K_2
\end{array}}$$

Als $z = f(x, y)$ een begrensde, niet-negatieve functie is gedefinieerd op een gesloten rechthoek $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \;\wedge\; c \leq y \leq d\}$, dan wordt de inhoud van het deel van de ruimte bepaald door $\{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b \;\wedge\; c \leq y \leq d \;\wedge\; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ gedefinieerd door de **Riemann dubbelintegraal**:

$$\boxed{\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_R f(x, y)dR}$$

Hierin is R het integratiegebied en $dxdy = dR$ het oppervlakte-element.

Eigenschappen van dubbelintegralen:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\iint\limits_R \{f(x,y) \pm g(x,y)\}dxdy = \iint\limits_R f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_R g(x,y)dxdy \\
\iint\limits_R \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_R f(x,y)dxdy \mid \lambda \in I\!R \\
\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dxdy \mid R = R_1 + R_2 \\
m \text{ en } M \text{ min. resp. max van } f \text{ op } R \Rightarrow m \cdot Opp\ R \leq \iint\limits_R f(x,y)dxdy \leq M \cdot Opp\ R
\end{array}}$$

Uit de laatste eigenschap volgt dat $\dfrac{1}{Opp\ R} \iint\limits_R f(x,y)dxdy = \mu \mid m \leq \mu \leq M \rightarrow$

$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \mu \cdot Opp\ R}$$

Daar f continu is op R neemt f elke waarde aan tussen m en $M \rightarrow$ er is een punt $(\xi, \eta) \in R$ zo, dat geldt: $f(\xi, \eta) = \dfrac{1}{Opp\ R} \iint\limits_R f(x,y)dxdy \rightarrow$

Middelwaardestelling van de integraalrekening:

$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta) \cdot Opp\ R \mid (\xi,\eta) \in R}$$

Een dubbelintegraal is te herleiden tot een zgn. **herhaalde integraal**, waarbij de volgorde van de integraties verwisseld mag worden:

$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy}$$

Een **gladde boog** is een puntverz. met vectorvergelijking $\vec{r}(t) = (X(t), Y(t)) \mid t \in [a,b]$.
Een **Jordankromme** is een gesloten, bij gedeelten gladde kromme die zichzelf niet snijdt.
Een kromme heet **rectificeerbaar** als hij een zekere lengte bezit.

Voor een dubbelintegraal die gedefinieerd is op een gebied
$G = \{(x,y) | a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ geldt:

$$\boxed{\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

Voor een dubbelintegraal die gedefinieerd is op een gebied
$G = \{(x,y)|c \le y \le d \wedge \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ geldt:

$$\boxed{\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$$

Voor een dubbelintegraal die gedefinieerd is op een gebied waarbij G omsloten wordt door een Jordankromme, geldt:

$$\boxed{\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$$

Een **convex gebied** is een gebied waarvan elk tweetal punten door een lijnstuk kan worden verbonden dat geheel binnen dat gebied ligt.
Een **enkelvoudig samenhangend gebied** R is een gebied met de eigenschap dat voor elke Jordankromme J die geheel in R ligt, ook het binnengebied van J geheel in R ligt.

Volgens de Stelling van Green geldt: $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_J P(x,y)dx + Q(x,y)dy \rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \forall J \in R : \oint_J P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

Uit $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ volgt tevens dat $\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ dan onafhankelijk is van de weg van A naar B.

De uitdrukking $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ heet een **differentiaalvorm**.
Een **exacte differentiaal** is een differentiaalvorm die de totale differentiaal is van een functie $F \rightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ is exact als er een functie F bestaat zo, dat $P(x,y) = F_x(x,y)$ en $Q(x,y) = F_y(x,y)$, ofwel als $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. De functie F is dan te schrijven als:

$$\boxed{F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(\xi,\eta)d\xi + Q(\xi,\eta)d\eta}$$

Daar (x_0, y_0) een willekeurig pu t in R is, is $F(x,y)$ bepaald op een constante na. De integratieweg van (x_0, y_0) naar (x,y) is een willekeurige (bij gedeelten gladde) kromme.
Als de punten $(x_0, y_0), (x, y_0), (x_0, y)$ en (x,y) in een convex gebied liggen, dan is de lijnintegraal te herleiden tot een gewone integraal:

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)ds = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)ds + \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt}$$

Stel: $\begin{cases} u = U(x,y) \\ v = V(x,y) \end{cases}$ beeldt elk punt (x,y) van een gebied G in het X,Y-vlak één-eenduidig af op een punt (u,v) van een gebied H in het U,V-vlak.

Voor de inverse transformatie geldt dan: $\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases}$

De coördinaten (u_0, v_0) van een punt in het U,V-vlak heten **kromlijnige coördinaten**.

Substitutie van $\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases}$ in $\begin{cases} u = U(x,y) \\ v = V(x,y) \end{cases}$ geeft: $\begin{cases} u = U\{X(u,v), Y(u,v)\} \\ v = V\{X(u,v), Y(u,v)\} \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial U}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{\partial U}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial u} \\ 0 = \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{\partial V}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial u} \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial U}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{\partial U}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial v} \\ 1 = \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{\partial V}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \wedge \frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \wedge \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}, \text{ met } D = \frac{\partial(U,V)}{\partial(x,y)}$$

Substitutie in $\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}$ geeft:

$$\boxed{\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(U,V)}{\partial(x,y)}}}$$

Stel: Een gebied G, begrensd door de Jordankromme $K : (x,y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ wordt d.m.v. de transformatie $x = X(u,v)$ en $y = Y(u,v)$ afgebeeld op een gebied H, begrensd door de Jordankromme L

Als K eenmaal linksom doorlopen wordt, dan geldt: $O = \int_K x dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)\varphi_2'(t)dt$

Op K geldt: $\begin{cases} x = \varphi_1(t) = X(u,v) \\ y = \varphi_2(t) = Y(u,v) \end{cases} \rightarrow O = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) \left\{ \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot \frac{d\psi_2}{dt} \right\} dt$

Als een punt K linksom doorloopt, dan doorloopt het beeldpunt L linksom als $D = \partial(X,Y)/\partial(u,v) > 0$ en rechtsom als $D < 0 \rightarrow$

$$O = \frac{|O|}{D} \int_L X(u,v)\frac{\partial Y}{\partial u}du + X(u,v)\frac{\partial Y}{\partial v}dv$$

Toepassing van de Stel. van Green met $P(u,v) = X(u,v)\dfrac{\partial Y}{\partial u}$ en $Q(u,v) = X(u,v)\dfrac{\partial Y}{\partial v}$ geeft:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = D \rightarrow O = \frac{|D|}{D} \iint\limits_H Ddudv = \iint\limits_H |D|dudv \rightarrow$$

$$\boxed{\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_H f\{X(u,v), Y(u,v)\} \left| \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right| dudv}$$

Bij overgang op cylindercoördinaten geldt:

$$\left\{\begin{array}{l} x = X(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi \\ y = Y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi \end{array}\right. \rightarrow z = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \ \wedge \ \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right| = \rho \rightarrow$$

$$\boxed{\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_H f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}$$

Een **oneigenlijke dubbelintegraal van de eerste soort** wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy}$$

Hierbij zijn de G_n's willekeurig gevormde begrensde deelgebieden van G.

$\iint\limits_{C_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^n e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi = 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}]_0^n = \pi(1-e^{-n^2})$

Hierin is $C_n = \{(x,y)|x^2+y^2 \le n^2 \wedge n \in I\!N\} \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{C_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi \rightarrow$

$$\boxed{\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi}$$

<u>Stel</u>: $V_n = \{(x,y)||x| \le n \wedge |y| \le n \wedge n \in I\!N\} \rightarrow \iint\limits_{V_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-n}^{n}\{\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\}e^{-y^2}dy \Leftrightarrow$

$\iint\limits_{V_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \{\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\}^2 \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\{\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\}^2 = \{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\}^2 = \pi \rightarrow$

<u>Integraal van Poisson</u>:

$$\boxed{\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

Vermenigvuldiging met $2/\sqrt{\pi}$ geeft de **<u>Foutenfunctie van Gauss</u>** Erf x:

$$\boxed{\mathrm{Erf}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2}du}$$

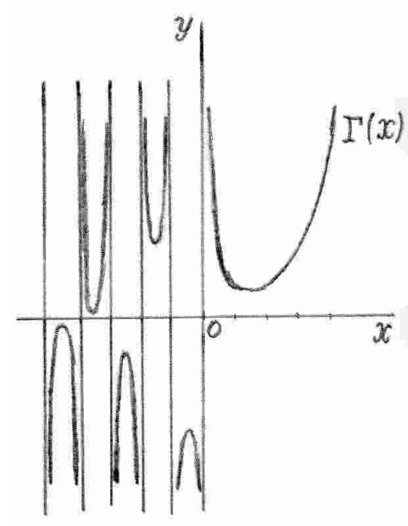
$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Erf}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{x\to\infty}\int\limits_0^x e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-u^2}du \rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\mathrm{Erf}\, x = 1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2}du + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-u^2}du = 1 \rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{Erf}\, x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-u^2}du}$$

De **Gammafunctie** $\Gamma(p)$ wordt gedefinieerd als:



$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \;\Big|\; p > 0}$$

$\int_0^\infty e^{-t} t^p dt = -\int_0^\infty t^p d(e^{-t}) = -[t^p e^{-t}]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \rightarrow$

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \mid p > 0}$$

$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) \rightarrow \Gamma(p+1) = p(p-1)\Gamma(p-1)$
Herhaalde toepassing van $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ geeft,

met $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$:

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p! \mid p \in I\!N}$$

Voor $p \in I\!R \backslash 0, -1, -2, -3, \ldots$ wordt $\Gamma(p)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \;\Big|\; p \in I\!R \backslash 0, -1, -2, -3, \ldots}$$

Voor de afgeleide van de Gammafunctie geldt: $\Gamma'(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \ln t dt \ldots \rightarrow$

$$\boxed{\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \ln^n t dt}$$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt$; substitutie van $t^{1/2} = u$ geeft: $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du \rightarrow$

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

Substitutie van $ax^n = y$ in $\int_0^\infty x^m a^{-ax^n} dx \mid m, n, a \in I\!R^+$ geeft:

$$\int_0^\infty \left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right\}^m e^{-y} d\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right\} = \frac{1}{a^{m/n}} \cdot \frac{1}{a^{1/n}} \cdot \frac{1}{n} \int_0^\infty y^{m/n} y^{(1/n)-1} e^{-y} dy \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty \left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right\}^m e^{-y} d\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right\} = \frac{1}{na^{(m+1)/n}} \int_0^\infty y^{(m+1-n)/n} e^{-y} dy \rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{na^{(m+1)/n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \;\Big|\; m, n, a \in I\!R^+}$$

Substitutie van $x = e^{-y}$ in $\int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx \mid n \in I\!N^+, m \in I\!R, m > -1$ geeft:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-my}(-y)^n e^{-y} dy = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{0} y^n e^{-(m+1)y} dy = (-1)^n \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{u}{m+1}\right)^n e^{-u} \frac{du}{m+1} \Leftrightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-my}(-y)^n e^{-y} dy = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int\limits_0^{\infty} u^n e^{-u} du \rightarrow$$

$$\boxed{\int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} \;\Bigg|\; n \in I\!N^+, m \in I\!R, m > -1}$$

<u>Stel</u>: $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda d\lambda \rightarrow \dfrac{\partial I}{\partial \beta} = -\int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\alpha\lambda^2} \sin\beta\lambda d\lambda = \dfrac{1}{2\alpha}\int\limits_0^{\infty} \sin\beta\lambda d(e^{-\alpha\lambda^2}) \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda d\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha} I \rightarrow \frac{\partial \ln I}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} \rightarrow I(\alpha, \beta) = Ce^{-\beta^2/4\alpha}$$

Substitutie van $x = \alpha\lambda^2$ in $I(\alpha, 0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} d\lambda$ geeft:

$$I(\alpha, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\sqrt{\alpha}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \rightarrow C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \rightarrow$$

$$\boxed{\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda d\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}}$$

De **Betafunctie** $B(p, q)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{B(p, q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \;\Bigg|\; p, q > 0}$$

Voor $p, q > 0$ convergeert $B(p, q)$. Uit substitutie van $t = 1 - u$ volgt:

$$\boxed{B(p, q) = B(q, p)}$$

Uit substitutie van $t = \cos^2\varphi \mid 0 \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$ volgt:

$$\boxed{B(p, q) = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi d\varphi}$$

Stel: $u=\sqrt{t} \rightarrow \Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int\limits_0^\infty e^{-u^2}u^{2p-1}du \cdot 2\int\limits_0^\infty e^{-v^2}v^{2q-1}dv = 4\iint\limits_C e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}dudv$

Hierin is $C=\{(u,v)|0\leq u^2+v^2\leq N(R)\wedge u,v\geq 0\}$.
Overgang op poolcoördinaten geeft (met $N(R)\rightarrow\infty$):

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi\cdot 2\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}d\rho B(p,q)\Gamma(p,q)\rightarrow$$

$$\boxed{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

Hieruit volgt:

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}}$$

Stel: $2p-1=0\wedge 2q-1=m\rightarrow\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^m\varphi d\varphi=\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma[\frac{1}{2}(m+1)]}{2\Gamma[\frac{1}{2}(m+2)]}$

Substitutie van $m=2r$ geeft:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^m\varphi d\varphi=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{2\Gamma(r+1)}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})(r-\frac{1}{2})(r-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2r(r-1)(r-2)\cdots 1}\Leftrightarrow$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^m\varphi d\varphi=\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 1}{2r(2r-2)(2r-4)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Analoog voor $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^m\varphi d\varphi\rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^m\varphi d\varphi=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^m\varphi d\varphi=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2}\ \Big|\ m=2,4,6,\ldots}$$

Substitutie van $m=2r+1$ geeft:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2r}\varphi d\varphi=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m+1)}{2\Gamma(r+\frac{3}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})r(r-1)(r-2)\cdots 1}{2(r+\frac{1}{2})(r-\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{2r(2r-2)(2r-4)\cdots 2}{2(2r+1)(2r-1)\cdots 1}\Leftrightarrow$$

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2r}\varphi d\varphi=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+1)}$; analoog voor $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2r}\varphi d\varphi\rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^m\varphi d\varphi=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^m\varphi d\varphi=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2}\ \Big|\ m=1,3,5,\ldots}$$

Stel: $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2p}xdx=\frac{1}{2}B(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$ en $J=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2p}2xdx$

Substitutie van $2x = u$ geeft: $J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^{2p} u du = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p} u du \equiv I$

Tevens geldt: $J = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin x \cos x)^{2p} dx = 2^{2p} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p} x \cos^{2p} x dx = 2^{2p-1} B(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}) \Leftrightarrow$

$J = \dfrac{2^{2p-1}\Gamma^2(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(2p+1)} \rightarrow \dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2p\Gamma(p)} = \dfrac{2^{2p-1}\Gamma^2(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(2p+1)} \rightarrow$

Verdubbelingsformule:

$$\boxed{2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p)}$$

Algemeen geldt:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(p+\frac{2}{m}\right)\cdots\left(p+\frac{m-1}{m}\right) = m^{(1/2)-mx}(2\pi)^{(m-1)/2}\Gamma(px)}$$

Substitutie van $x = \dfrac{y}{1-y}$ en $dx = \dfrac{dy}{(1-y)^2}$ in $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \,\Bigg|\, 0 < p < 1$ geeft:

$$\int\limits_0^1 \frac{y^{p-1}}{(1-y)^{p-1}}(1-y)\frac{dy}{(1-y)^2} = \int\limits_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p} dy = B(p, 1-p) \rightarrow$$

$$\boxed{\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) \;\Bigg|\; 0 < p < 1}$$

Substitutie van $xu = y$ in $\int\limits_0^{\infty} u^{p-1} e^{-xu} du \mid 0 < p < 1$ geeft:

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{p-1} e^{-y}\frac{dy}{x} = \frac{1}{x^p}\int\limits_0^{\infty} y^{p-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(p)}{x^p} \rightarrow \frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^{\infty} u^{p-1}e^{-xu}du \rightarrow$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} u^{p-1}e^{-xu}\sin x du dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^{\infty}\frac{u^{p-1}}{1+u^2}du$$

Substitutie van $u^2 = v$ en $du = \dfrac{dv}{2v^{1/2}}$ geeft: $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}p\pi} \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi} \;\Bigg|\; 0 < p < 1}$$

Analoog geldt voor $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx \,\Bigg|\, 0 < p < 1$:

$$\boxed{\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\frac{1}{2}p\pi} \;\Bigg|\; 0 < p < 1}$$

$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty e^{n\ln x - x} dx$; substitutie van $x = n + y$ geeft:

$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty e^{n\ln(n+y)-n-y} dy = e^{-n} \int\limits_0^\infty e^{n\ln[n\{1+(y/n)\}]-y} dy = n^n e^{-n} \int\limits_{-n}^\infty e^{n\ln\{1+(y/n)\}-y} dy \Leftrightarrow$

$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n} \int\limits_{-n}^\infty e^{y-(y^2/2n)+(y^3/3n^2)-\cdots-y} dy = n^n e^{-n} \int\limits_{-n}^\infty e^{-y^2/2n+(y^3/3n^2)-\cdots-y} dy$

Substitutie van $y = \sqrt{n}v$ geeft: $\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{n} \int\limits_{-\sqrt{n}}^\infty e^{-v^2/2+(v^3/3\sqrt{n})-\cdots-} dv \rightarrow$

$n \gg 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) \approx n^n e^{-n}\sqrt{n} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = n^n e^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi} \rightarrow$

Als $n \in I\!N$, dan geldt voor $n!$ de **Formule van Stirling**:

$$\boxed{n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

Een **Dirichlet integraal** is een integraal van de vorm $\int\int\limits_V\int x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz$ met V:

$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$ een gesloten gebied in het 1-ste octant en $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, p, q, r \in I\!R^+$.

<u>Stel</u>: $\left(\frac{x}{a}\right)^p = u \wedge \left(\frac{y}{b}\right)^q = v \wedge \left(\frac{z}{c}\right)^r = w \rightarrow$

$$I = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \int\int\limits_R\int u^{\frac{\alpha}{p}-1} v^{\frac{\beta}{q}-1} w^{\frac{\gamma}{r}-1} dudvdw \,\Bigg|\, R: u+v+w=1 \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \int\limits_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} \int\limits_{w=0}^{1-u-v} u^{\frac{\alpha}{p}-1} v^{\frac{\beta}{q}-1} w^{\frac{\gamma}{r}-1} dudvdw \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\cdot\frac{r}{\gamma} \int\limits_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} u^{\frac{\alpha}{p}-1} v^{\frac{\beta}{q}-1} (1-u-v)^{\frac{\gamma}{r}} dudv = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\cdot\frac{r}{\gamma} \int\limits_{u=0}^1 u^{\frac{\alpha}{p}-1} \left\{ \int\limits_{v=0}^{1-u} v^{\frac{\beta}{q}-1} (1-u-v)^{\frac{\gamma}{r}} dv \right\} du$$

<u>Stel</u>: $v = (1-u)t \rightarrow \int\limits_{v=0}^{1-u} v^{\frac{\beta}{q}-1}(1-u-v)^{\frac{\gamma}{r}} dv = (1-u)^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} \int\limits_{t=0}^1 t^{\frac{\beta}{q}-1}(1-t)^{\frac{\gamma}{r}} dt \Leftrightarrow$

$$\int\limits_{v=0}^{1-u} v^{\frac{\beta}{q}-1}(1-u-v)^{\frac{\gamma}{r}} dv = (1-u)^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} B\left(\frac{\beta}{q}, \frac{\gamma}{r}+1\right) = (1-u)^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma(\frac{\gamma}{r}+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \rightarrow$$

$$I = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\cdot\frac{r}{\gamma}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma(\frac{\gamma}{r}+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \int\limits_{u=0}^1 u^{\frac{\alpha}{p}-1}(1-u)^{\frac{\beta}{q}-\frac{\gamma}{r}} du = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\cdot\frac{r}{\gamma}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma(\frac{\gamma}{r}+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} B\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \cdot \frac{r}{\gamma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma(\frac{\gamma}{r}+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \rightarrow$$

$$\boxed{\int\int_V\int x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma(\frac{\gamma}{r})}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \quad \Bigg| \quad \alpha,\beta,\gamma,a,b,c,p,q,r \in I\!\!R^+}$$

$$I_p = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^p}du = -\int_x^\infty \frac{de^{-u}}{u^p} = \left[-\frac{e^{-u}}{u^p}\right]_x^\infty - p\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+1}}du = \frac{e^{-x}}{x^p} - pI_{p+1} \quad \Bigg| \quad x,p>0$$

Analoog voor $I_{p+1} = \dfrac{e^{-x}}{x^{p+1}} - (p+1)I_{p+2} \rightarrow I_p = \dfrac{e^{-x}}{x^p} - \dfrac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1)I_{p+2} + \cdots \rightarrow$

$$\boxed{\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^p}du = e^{-x}\left\{\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \frac{p(p+1)(p+2)}{x^{p+3}} + \cdots\right\} \quad \Bigg| \quad x,p>0}$$

Substitutie van $p = \frac{1}{2}$ en $x = x^2$ geeft voor Erf x:

$$\boxed{\mathrm{Erf}\, x = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^7} + \cdots\right)}$$

De **Dirac deltafunctie** $\delta(x-x')$ is een naaldfunctie waarvoor geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(x=x') = \left\{\begin{array}{l} 0 \ \mid x \neq x' \\ \infty \mid x = x' \end{array}\right. \\ \displaystyle\int_a^b \delta(x-x')dx = 1 \quad \Bigg| \quad a < x' < b \end{array}}$$

Voor elke willekeurige continue functie $f(x)$ geldt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\delta(x-x')dx = f(x')}$$

Voor $\delta(x)$ gelden de volgende identiteiten:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(x) = \delta(-x) \\ x\dfrac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x) \\ x\delta(x) = 0 \end{array}}$$

De **Heaviside stapfunctie** $\theta(x-x')$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\theta(x-x') = \left\{\begin{array}{l} 0 \mid x < x' \\ 1 \mid x > x' \end{array}\right.}$$

Substitutie van $d\theta/dx$ in $\int_a^b f(x)\delta(x-x')dx$ geeft:

$$\int_a^b \frac{d\theta(x-x')}{dx} f(x)dx = [\theta(x-x')f(x)]_a^b - \int_a^b \theta(x-x')\frac{df}{dx}dx = f(b) - \int_{x'}^b df(x) = f(x') \rightarrow$$

De Deltafunctie kan dus worden opgevat als de afgeleide van de Heaviside functie.

De Deltafunctie kan ook worden geschreven als:

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}dk}$$

Het 3-dimensionale equivalent hiervan is dan:

$$\boxed{\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}dxdydz}$$

Als $\{\phi_n(x)\}$ een verz. orthonormale functies is, dan geldt voor een willekeurige functie $\psi(x)$:

$\psi(x) = \sum_n c_n\phi_n(x) = \sum_n \langle\phi_n(x')|\psi(x')\rangle\,\phi_n(x) = \sum_n\{\int_a^b \phi_n^*(x')\psi(x')dx'\}\phi_n(x) \Leftrightarrow$

$\psi(x) = \int_a^b\{\sum_n \phi_n(x)\phi_n^*(x')\}\psi(x')dx' \rightarrow$

Insluitrelatie:

$$\boxed{\sum_n \phi_n(x)\phi_n^*(x') = \delta(x-x')}$$

Als een functie f gedefinieerd is op een omgeving van een punt $P(a,b)$ in het platte vlak, dan heeft f een **pool** in P als geldt: $\lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)} f(x,y) = \infty$

Een **singulariteit** van een functie f is een punt waar f niet gedefinieerd is, of wel gedefinieerd maar een pool heeft.

Een **geïsoleerde singulariteit** P is een singulariteit waarbij er een cirkel bestaat rond P waarbinnen f geen andere singulariteiten heeft.

Een **oneigenlijke dubbelintegraal van de tweede soort** wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\iint_G f(x,y)dxdy = \lim_{n\rightarrow\infty} \int\int_{G-G_n} f(x,y)dxdy}$$

Hierbij zijn de G_n's omgevingen van P waarvan de diameter naar nul nadert als $n \rightarrow \infty$.

$$\iint_C \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} \Bigg| \; p > 0 \wedge C = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\} \text{ heeft een pool in } C \text{ in } (0,0) \rightarrow$$

$$\int\int_{C-C_n} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/n}^{R} \frac{dr}{r^{p-1}} = 2\pi\int_{1/n}^{R}\frac{dr}{r^{p-1}} \Bigg| \; C_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = n^{-2}\}$$

De integraal convergeert voor $p < 2 \rightarrow \iint\limits_C \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} = \lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{C-C_n} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} \rightarrow$

$$\boxed{\iint\limits_C \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} = \frac{2\pi R^{2-p}}{2-p}}$$

Stel: $f(x,y,z)$ is een continue functie gedefinieerd op een begrensd gebied van de ruimte $V = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) \leq 0\}$

De **drievoudige integraal** van f over V wordt dan gedefinieerd als:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV}$$

Als $f(x,y,z) \equiv 1$ in V, dan stelt $\iiint\limits_V dV$ de inhoud van V voor:

$$\boxed{I_V = \iiint\limits_V dxdydz}$$

De eigenschappen die dubbelintegralen hebben gelden ook voor drievoudige integralen. Zo kan een drievoudige integraal herleid worden tot een herhaalde integraal.

Stel: $\begin{cases} x = X(u,v,w) \\ y = Y(u,v,w) \\ z = Z(u,v,w) \end{cases} \rightarrow D = \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \partial X/\partial u & \partial X/\partial v & \partial X/\partial w \\ \partial Y/\partial u & \partial Y/\partial v & \partial Y/\partial w \\ \partial Z/\partial u & \partial Z/\partial v & \partial Z/\partial w \end{vmatrix} \rightarrow$

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f(\{X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w)\}\left|\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw}$$

Overgang op cylindercoördinaten geeft: $f(x,y,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \wedge \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(u,v,w)} = \rho \rightarrow$

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz}$$

Uit $f(x,y,z) \equiv 1$ volgt voor de inhoud van V:

$$\boxed{I_V = \iiint\limits_W \rho d\rho d\varphi dz}$$

Overgang op bolcoördinaten geeft: $f(x,y,z) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \wedge \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \rightarrow$

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi}$$

Uit $f(x,y,z) \equiv 1$ volgt voor de inhoud van V:

$$\boxed{I_V = \int\int_W\int r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}$$

Voor de oppervlakte van een gebied G, bepaald door $y = f(x) \mid f(x) \geq 0, x = a$ en $x = b$ geldt: $O = \int_a^b f(x)dx$

Tevens geldt: $\int\int_G dxdy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)dx \rightarrow$

$$\boxed{\int\int_G dxdy = \int_a^b f(x)dx}$$

Voor de oppervlakte van een gebied G, bpaald door $x = \varphi(y) \mid \varphi(y) \geq 0, y = c$ en $y = d$ geldt: $O = \int_c^d \varphi(y)dy$

Tevens geldt: $\int\int_G dxdy = \int_c^d dy \int_0^{\varphi(y)} dx = \int_a^b \varphi(y)dy \rightarrow$

$$\boxed{\int\int_G dxdy = \int_c^d \varphi(y)dy}$$

Bij overgang op poolcoördinaten geldt:

$$\boxed{\int\int_G dxdy = \int\int_H \rho d\rho d\varphi}$$

Als $R = R(\varphi)$ de poolvergelijking van een kromme K is, dan geldt voor de oppervlakte begrensd door K en de voerstralen $\varphi = \varphi_1$ en $\varphi = \varphi_2$: $O = \int\int_H \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{R(\varphi)} \rho d\rho d\varphi \rightarrow$

$$\boxed{O = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2(\varphi)d\varphi}$$

Als $r = R(\varphi, \theta)$ de vergelijking van een oppervlak in bolcoördinaten is, dan geldt:
$I_V = \int\int_V\int r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R(\varphi,\theta)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \rightarrow$

$$\boxed{I_V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^3(\varphi,\theta) \sin\theta d\theta d\varphi}$$

Een **omwentelingslichaam** ontstaat als een kromme $y = f(x)$ gelegen in het X, Y-vlak om de X-as of de Y-as wordt gewenteld.

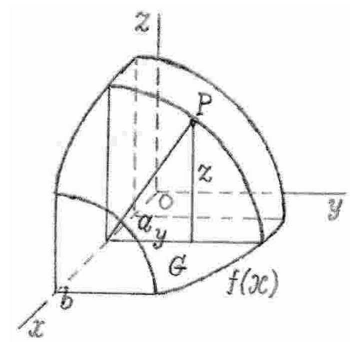
Bij wenteling om de X-as tussen de lijnen $x = a$ en $x = b$ geldt voor de z-component van een punt $P(x, y, z)$ van het omwentelingsoppervlak: $z = \sqrt{f^2(x) - y^2} \rightarrow$

$$I = \iint_G f(x,y)dxdy = 4\int_a^b dx \int_0^{f(x)} \sqrt{f^2(x) - y^2}dy$$

Hierin is $G = \{(x, y) \mid Y = 0 \wedge x = a \wedge x = b \wedge y = f(x)\}$

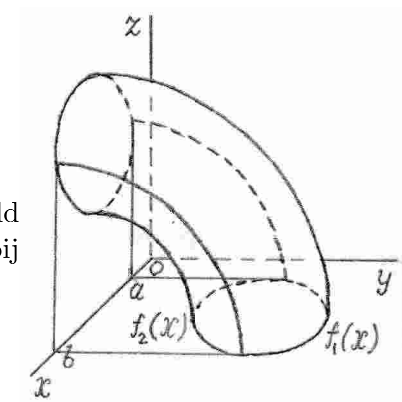
De integraal naar y stelt de oppervlakte voor van een kwartcirkel met straal $f(x)$, zijnde $\frac{1}{4}\pi f^2(x) \rightarrow$

$$\boxed{I = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$



Analoog geldt voor de inhoud bij wenteling om de Y-as tussen de lijnen $y = c$ en $y = d$:

$$\boxed{I = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy}$$



Hierbij is $x = \varphi(y)$ de inverse functie van $y = f(x)$.

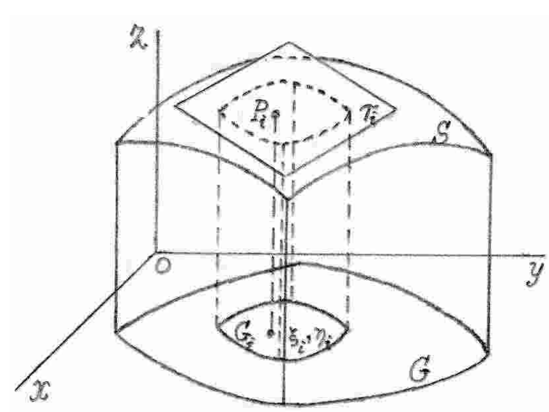
Voor een gesloten kromme die de X-as niet snijdt en bepaald wordt door $y_1 = f_1(x) \wedge y_2 = f_2(x)$ geldt voor de inhoud bij wenteling om de X-as:

$$\boxed{I = \pi \int_a^b \{f_1^2(x) - f_2^2(x)\}dx}$$

Als $S : z = f(x, y)$ een gekromd oppervlak is boven een gebied G in het X, Y-vlak, dan geldt voor de vergelijking van het raakvlak in punt $P(\xi_i, \eta_i, z_i)$:
$z - z_i = f_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \rightarrow$ Richtingsgetallen van de normaal n in P op S zijn $(f_x(\xi_i, \eta_i), f_y(\xi_i, \eta_i), -1) \rightarrow$ Richtingscosinus van de scherpe hoek γ_i die n met de Z-as maakt is $\cos\gamma_i = 1/\sqrt{f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}$.

Als G wordt verdeeld in deeloppervlakken $\Delta G_1, \ldots, \Delta G_n$ met punten $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$, dan hoort bij elk punt (ξ_i, η_i) een punt $\{(\xi_i, \eta_i), f(\xi_i, \eta_i)\} \in S$ waardoor een raakvlak is aan te brengen. Als γ_i de hoek is die dit vlak met het X, Y-vlak maakt en $\Delta\tau_i$ de oppervlakte van het deel τ_i van het raakvlak boven G_i, dan geldt: $\Delta G_i = \Delta\tau_i \cos\gamma_i \rightarrow$
$\Delta\tau_i = \sqrt{f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i) + 1}\Delta G_i \rightarrow$

$$O_S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i) + 1}\Delta G_i \rightarrow$$



$$\boxed{O_S = \iint\limits_G \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy}$$

Als S impliciet is gegeven, dan geldt: $S : F(x,y,z) = 0 \mid z = f(x,y) \rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \rightarrow$$

$$\boxed{O_S = \iint\limits_G \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \Bigg/ \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dxdy}$$

<u>Stel</u>: $\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases} \rightarrow S : z = f(x,y) = f\{X(u,v), Y(u,v)\} = Z(u,v)$

Voor de inverse transformatie geldt: $\begin{cases} u = U(x,y) \\ v = V(x,y) \end{cases} \rightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} \wedge \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} \wedge \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \wedge \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial X}{\partial u}, \text{ met } D = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}$$

$$f(x,y) = Z(u,v) = Z\{U(x,y), V(x,y)\} \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}; \text{ analoog voor } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(X,Z)}{\partial(u,v)} \rightarrow$$

$$O_S = \iint\limits_G \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right|^{-1} \sqrt{\left\{\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right\}^2} dxdy \rightarrow$$

$$\boxed{O_S = \iint\limits_H \sqrt{\left\{\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right\}^2} dudv}$$

Overgang op cylindercoordinaten geeft: $S : z = f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = Z(\rho,\varphi) \wedge$

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \rho \wedge \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(\rho,\varphi)} = \sin\varphi\frac{\partial Z}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial Z}{\partial\rho} \wedge \frac{\partial(Z,X)}{\partial(\rho,\varphi)} = -\rho\sin\varphi\frac{\partial Z}{\partial\rho} - \cos\varphi\frac{\partial Z}{\partial\varphi} \rightarrow$$

$$\boxed{O_S = \iint\limits_H \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\partial Z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\right)^2} d\varphi d\rho}$$

Overgang op bolcoördinaten geeft: $S : z = f(x,y) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi)$
Voor de afstand r van O tot een punt $P \in S$ geldt: $r = R(\theta,\varphi) \rightarrow$

$$S : \begin{cases} x = X(\theta,\varphi) = R(\theta,\varphi)\sin\theta\cos\varphi \\ y = Y(\theta,\varphi) = R(\theta,\varphi)\sin\theta\sin\varphi \\ z = Z(\theta,\varphi) = R(\theta,\varphi)\cos\varphi \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\partial(X,Y}{\partial(\theta,\varphi)} = R(\theta,\varphi)\sin\theta\left\{R(\theta,\varphi)\cos\theta + \frac{\partial R}{\partial\theta}\sin\theta\right\}$$

$$\frac{\partial(Y,Z}{\partial(\theta,\varphi)} = R(\theta,\varphi)\left\{\frac{\partial R}{\partial\varphi}\sin\varphi + R(\theta,\varphi)\sin^2\theta\cos\varphi - \frac{\partial R}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right\}$$

$$\frac{\partial(Z,X}{\partial(\theta,\varphi)} = -R(\theta,\varphi)\left\{\frac{\partial R}{\partial\varphi}\cos\varphi - R(\theta,\varphi)\sin^2\theta\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{O_S = \iint\limits_H R(\theta,\varphi)\sqrt{\left\{R^2(\theta,\varphi) + \left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2\right\}\sin^2\theta + \left(\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right)^2} d\theta d\varphi}$$

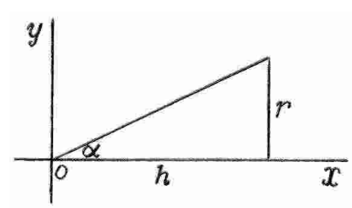
Voor de z-component van een punt van het oppervlak S van een omwentelingslichaam geldt:

$$z = \sqrt{f^2(x) - y^2} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} \rightarrow$$

$$O_S = 4\int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} \sqrt{\frac{\{f(x)f'(x)\}^2}{f^2(x) - y^2} + \frac{y^2}{f^2(x) - y^2} + 1} dy = 4\int\limits_a^b f(x)\sqrt{f'^2(x) + 1} dx \int\limits_0^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}$$

$$\boxed{O_S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{f'^2(x) + 1} dx}$$

Voor een kegel met hoogte h, straal r en top in O geldt:

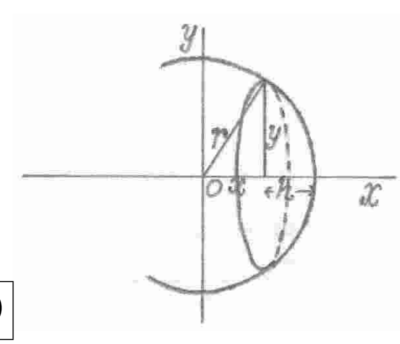


$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{r}{h} \rightarrow y = \frac{r}{h}x \rightarrow I_{\text{kegel}} = \pi\int\limits_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx \rightarrow$$

$$\boxed{I_{\text{kegel}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h}$$

$$O_{\text{kegel}} = 2\pi\int\limits_0^h \frac{rx}{h}\sqrt{\frac{r^2}{h^2} + 1} dx = \frac{2\pi r\sqrt{r^2 + h^2}}{h^2}\int\limits_0^h x dx \rightarrow$$

$$\boxed{O_{\text{kegel}} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}}$$



Voor een bolsegment met straal r en hoogte h geldt:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow I_{\text{bolsegment}} = \pi\int\limits_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx \rightarrow$$

$$\boxed{I_{\text{bolsegment}} = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)}$$

$$O_{\text{bolsegment}} = 2\pi \int\limits_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2} + 1}dx = 2\pi r \int\limits_{r-h}^{r} dx \rightarrow$$

$$\boxed{O_{\text{bolsegment}} = 2\pi rh}$$

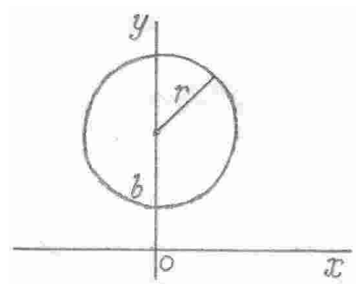
Integratie van 0 naar r geeft voor de inhoud van een halve bol: $I = \frac{2}{3}\pi r^3 \rightarrow$

$$\boxed{I_{\text{bol}} = \tfrac{4}{3}\pi r^3}$$

Integratie van 0 naar r geeft voor de oppervlakte van een halve bol: $O = 2\pi r^2 \rightarrow$

$$\boxed{O_{\text{bol}} = 4\pi r^2}$$

Voor een torus die ontstaat als een cirkel met MP in $(0, b)$ en straal r om de X-as wentelt geldt:
$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \rightarrow$
$f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2} \wedge f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow$
$I_{\text{torus}} = 4\pi b \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 4\pi b \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \rightarrow$



$$\boxed{I_{\text{torus}} = 2\pi^2 br^2}$$

$$O_{\text{torus}} = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} (b + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2} + 1}dx + 2\pi \int\limits_{-r}^{r} (b - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2} + 1}dx \Leftrightarrow$$

$$O_{\text{torus}} = 4\pi br \int\limits_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi br \left[\arcsin \frac{x}{r}\right]_{-r}^{r} \rightarrow$$

$$\boxed{O_{\text{torus}} = 4\pi^2 br}$$

Een **verlengde omwentelingsellipsoïde** ontstaat als de ellips met vergelijking $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ om de grote as wentelt. Voor de inhoud van de halve ellipsoïde geldt dan:

$$I = \pi \frac{b^2}{a^2} \int\limits_0^a (a^2 - x^2)dx \rightarrow$$

$$\boxed{I_{\text{omwentelingsellipsoïde}} = \tfrac{4}{3}\pi ab^2}$$

Voor de oppervlakte van de halve ellipsoïde geldt:

$$O = 2\pi \int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)} + 1}dx = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}dx \rightarrow$$

$$O = \frac{4\pi b}{a^2} \int\limits_0^a \sqrt{a^4 - c^2x^2}dx \;\Bigg|\; a^2 - b^2 = c^2$$

Stel: $a^2 = r \wedge cx = z \to dx = dz/c \to$

$\int_0^a \sqrt{a^4 - c^2x^2}dx = c^{-1}\int_0^{ac} \sqrt{r^2 - z^2}dz = c^{-1}[\frac{1}{2}z\sqrt{r^2 - z^2} + \frac{1}{2}r^2 \arcsin(z/r)]_0^{ac} \Leftrightarrow$

$\int_0^a \sqrt{a^4 - c^2x^2}dx = \frac{1}{2}a\sqrt{a^4 - a^2c^2} + \frac{1}{2}(a^4/c)\arcsin(c/a) = \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{2}(a^4/c)\arcsin(c/a) \to$

$$\boxed{O_{\text{omwentelingsellipsoïde}} = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c}\arcsin\frac{c}{a}}$$

Een **afgeplatte omwentelingsellipsoïde** ofwel **spheroïde** ontstaat als de ellips om de kleine as wentelt. Voor de inhoud van de halve spheroïde geldt:

$I = \pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - y^2)dy \to$

$$\boxed{I_{\text{spheroïde}} = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b}$$

Als $a < b$, dan liggen de brandpunten van de ellips op de Y-as en is $c^2 = b^2 - a^2$, zodat c^2 van teken omdraait $\to O = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 + c^2x^2}dx$

Stel: $a^2 = r \wedge cx = z \to \int_0^a \sqrt{a^4 + c^2x^2}dx = c^{-1}\int_0^{ac} \sqrt{r^2 + z^2}dz \to$

$\int_0^{ac} \sqrt{r^2 + z^2}dz = \frac{1}{2}[z\sqrt{r^2 + z^2} + r^2 \ln(z + \sqrt{r^2 + z^2})]_0^{ac} \to$

$\int_0^a \sqrt{a^4 + c^2x^2}dx = \frac{1}{2}\{a\sqrt{a^4 + a^2c^2} + (a^4/c)\ln(ac + \sqrt{a^4 + a^2c^2}) - (a^4/c)\ln a^2\}$

$\sqrt{a^4 + a^2x^2} = a\sqrt{a^2 + c^2} = ab \to$

$\int_0^a \sqrt{a^4 + c^2x^2}dx = \frac{1}{2}[a^2b + (a^4/c)\ln\{(ac + ab)/a^2\}] = \frac{1}{2}[a^2b + (a^4/c)\ln\{(b + c)/a\}] \to$

$O = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c}\ln\frac{b + c}{a}$

Stel: $a > b \to c^2 = a^2 - b^2$; verwisseling van a en b geeft dan:

$$\boxed{O_{\text{spheroïde}} = 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{c}\ln\frac{a + c}{b}}$$

Voor een drie-assige ellipsoïde geldt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Als γ de cosinus is van de hoek die de normaal op het oppervlak met de Z-as maakt, dan geldt: $\gamma = \frac{z}{c^2\sqrt{(x^2/a^)) + (y^2/b^4) + (z^2/c^4)}} \to$

$1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{c^4[(x^2/a^)) + (y^2/b^4) + (z^2/c^4)]}{z^2} \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

Daar $\gamma < 1$, is $1 - (1/\gamma^2) < 0$ en stelt de vergelijking dus een kegel voor met top in O die de ellipsoïde in alle punten snijdt waarvoor geldt dat hun normaal op het oppervlak met de Z-as een hoek insluit waarvan de cosinus gelijk is aan γ. Deze vormen een 4-de graads doorsnijdingskromme die uit 2 t.o.v. het XOY-vlak symmetrisch gesloten ruimtekrommen bestaat.

Substitutie van $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{c^2\gamma^2}{1-\gamma^2}\left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}\right)$ in $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ geeft:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{1-\gamma^2}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2\gamma^2}{a^2(1-\gamma^2)} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{b^2(1-\gamma^2)} \cdot \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\frac{a^2(1-\gamma^2) + c^2\gamma^2}{a^2(1-\gamma^2)}\right\}\frac{x^2}{a^2} + \left\{\frac{b^2(1-\gamma^2) + c^2\gamma^2}{b^2(1-\gamma^2)}\right\}\frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2 - (a^2 - c^2)\gamma^2}{a^4(1-\gamma^2)}x^2 + \frac{b^2 - (b^2 - c^2)\gamma^2}{b^4(1-\gamma^2)}y^2 = 1$$

De projectie van de 2 ruimtekrommen op het XOY-vlak zijn dus ellipsen met halve assen $\dfrac{a^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2)\gamma^2}}$ en $\dfrac{b^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{b^2 - (b^2 - c^2)\gamma^2}} \rightarrow$

$$O_{\text{ellips}} = \pi ab = \frac{\pi a^2 b^2 (1-\gamma^2)}{\sqrt{\{a^2 - (a^2 - c^2)\gamma^2\}\{b^2 - (b^2 - c^2)\gamma^2\}}} = E$$

Als dE het oppervlakte-element is in het XOY-vlak dat gevormd wordt door de ring tussen 2 ellipsen met infinitesimaal verschillende γ, dan is dE/γ het bijbehorende oppervlakte-element op de ellipsoïde. De oppervlakte van de gehele ellipsoïde is dan gelijk aan:

$$O = -2\int_0^1 \frac{dE}{\gamma}$$

De integratiegrenzen komen overeen met een afname van de hoek van $\frac{1}{2}\pi$ naar nul; hierbij wordt γ groter en dus E kleiner, zodat het minteken voor een pos. oppervlakte zorgt.

<u>Stel</u>: $k^2 = \dfrac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} \quad \wedge \quad c = a\cos\mu \rightarrow$

$$a\sin\mu = \sqrt{a^2 - c^2} \;\wedge\; k^2 = \frac{a^2b^2 - a^2c^2}{b^2a^2\sin^2\mu} = \frac{1 - (c^2/b^2)}{\sin^2\mu} \rightarrow c = b\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}$$

<u>Stel</u>: $\gamma = \dfrac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\mu} \;\Big|\; \gamma \in [0;1] \Rightarrow \varphi \in [0;\mu] \rightarrow$

$$O = -2\int_0^\mu \frac{dE}{\sin\varphi/\sin\mu} = -\frac{2\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\int_0^\mu \frac{dE}{\sin\varphi}$$

Hierbij is $E = \dfrac{\pi a^2 b^2[1 - \{a^2\sin^2\varphi/(a^2 - c^2)\}]}{\sqrt{[a^2 - \{a^2\sin^2\mu\}(\sin^2\varphi/\sin^2\mu)][b^2 - \{b^2 - c^2\}(\sin^2\varphi/\sin^2\mu)]}} \Leftrightarrow$

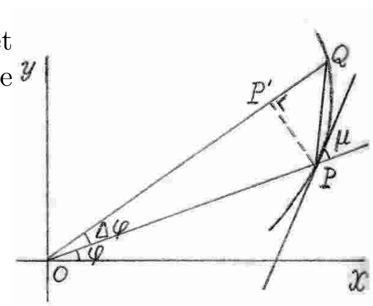
$$E = \frac{\pi a^2 b^2[1 - \{a^2\sin^2\varphi/(a^2 - c^2)\}]}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi}\sqrt{b^2 - \{b^2k^2\sin^2\mu(\sin^2\varphi/\sin^2\mu)\}}} = \frac{\pi ab[1 - \{a^2\sin^2\varphi/(a^2 - c^2)\}]}{\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

Voor de oppervlakte van een 3-assige ellipsoïde geldt nu:

$$\boxed{O_{\text{3-assige ellipsoïde}} = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\int\limits_0^{\mu}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi + c^2\int\limits_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]}$$

<u>Stel</u>: $E_{\mu,k} = \int\limits_0^{\mu}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi \quad \wedge \quad F_{\mu,k} = \int\limits_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \rightarrow$

$$\boxed{O_{\text{3-assige ellipsoïde}} = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)E_{\mu,k} + c^2F_{\mu,k}\right]}$$



Als $P(r,\varphi)$ en $Q(r+\Delta r,\varphi+\Delta\varphi)$ punten van een kromme met poolvergelijking $r = R(\varphi)$ zijn en μ de hoek is tussen het verlengde van de voerstraal r en de raaklijn in P, dan geldt:
$\text{Opp.}_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}\overline{OQ}\cdot\overline{PP'} = \frac{1}{2}(r+\Delta r)r\sin\Delta\varphi \Leftrightarrow$

$\text{Opp.}_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}r^2\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\Delta\varphi + \frac{1}{2}r\Delta r\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\Delta\varphi \rightarrow$

$O_{\text{sector}} = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\sum \text{Opp}_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\Delta r d\varphi$

Daar $\Delta r \to 0$ gaat als $\Delta\varphi \to 0$ nadert, is de 2-de integraal nul $\rightarrow$

$$\boxed{O_{\text{sector}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi}$$

Voor de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als $r = R(\varphi)$ om de X-as wentelt geldt dat dit gelijk is aan het verschil van de inhoud van de omwentelingskegel met schuine zijde $\overline{OQ}$, en die met schuine zijde $\overline{OP}$ en de inhoud van de omwentelingsfiguur gevromd door boog PQ:

$I_{\text{sector}} = \frac{1}{3}\pi r_2^3\sin^2\varphi_2\cos\varphi_2 - \frac{1}{3}\pi r_1^3\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1 - \pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin^2\varphi d(r\cos\varphi) \Leftrightarrow$

$I_{\text{sector}} = \frac{1}{3}\pi[r^3\sin^2\varphi\cos\varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} - \pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin^2\varphi d(r\cos\varphi) \Leftrightarrow$

$I_{\text{sector}} = \frac{1}{3}\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{d(r^3\sin^2\varphi\cos\varphi) - 3r^2\sin^2\varphi d(r\cos\varphi)\} \Leftrightarrow$

$I_{\text{sector}} = \frac{1}{3}\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{3r^2\sin^2\varphi\cos\varphi dr + 2r^3\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi - r^3\sin^3\varphi d\varphi + 3r^3\sin^3\varphi d\varphi -$
$3r^2\sin^2\varphi\cos\varphi dr\} \rightarrow$

$$\boxed{I_{\text{sector}} = \frac{2}{3}\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\sin\varphi d\varphi}$$

Substitutie an $y = r\sin\varphi$ en $dx = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$ in $O = 2\pi\int\limits_a^b \sqrt{y'^2+1}dx$ geeft voor de oppervlakte:

$$\boxed{O_{\text{sector}} = 2\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sqrt{r^2 - r'^2}\sin\varphi d\varphi}$$

Als $S : z = f(x,y)$ en oppervlak is gedefinieerd op een gebied G in het X,Y-vlak en $\varphi : (x,y,z) \to \varphi(x,y,z)$ een continue functie gedefinieerd op een driedimensionale omgeving van S, dan wordt de **oppervlakteintegraal** gedefinieerd als:

$$\boxed{\iint\limits_S \varphi(x,y,z)dS = \iint\limits_G \varphi(x,y,z)\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy}$$

Fourieranalyse

Een functie $f(x)$ is **periodiek** met periode T als voor alle x geldt:

$$\boxed{f(x) = f(x+T) \mid T \in I\!R^+}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}dx = \left[-\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = 0; \text{ analoog voor } \int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}dx \rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}dx = 0 \;\Bigg|\; k \in I\!N^+}$$

$$m \neq n \Rightarrow \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx = 0$$

Analoog geldt: $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$

$$m = n \Rightarrow \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = L$$

Analoog geldt: $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = L \rightarrow$

$$\boxed{\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & \mid m \neq n \\ L & \mid m = n \end{cases} \;\Bigg|\; m,n \in I\!N^+}$$

$$m \neq n \Rightarrow \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\sin\frac{(m-n)\pi x}{L} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx = 0$$

$$m = n \Rightarrow \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{2n\pi x}{L}dx = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \;\Bigg|\; m,n \in I\!N^+}$$

<u>Stel</u>: $A + \sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)] \mid n \in I\!N^+$ convergeert op $(-L, L)$ uniform naar $f(x) \rightarrow$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = A\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\} \Leftrightarrow$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_m L \to a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx \quad \Bigg| \quad m \in I\!N^+$$

Analoog geldt: $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = b_m L \to b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx \quad \Bigg| \quad m \in I\!N^+$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} A dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 2AL \to$$

$$A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx;\ m = 0 \Rightarrow a_0 = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \to A = \tfrac{1}{2}a_0 \to$$

Als $f(x)$ de periode $2L$ heeft, d.w.z. buiten $f(x)$ geldt $f(x+2L) = f(x)$, dan wordt de **Fourierexpansie** van $f(x)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \Bigg| \quad n \in I\!N^+}$$

Hierin zijn a_n en b_n de **Fouriercoëfficiënten** waarvoor geldt:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad \wedge \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx}$$

De functie $f(x)$ is nu te schrijven als:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}}$$

Als c een willekeurig getal reëel is, dan zijn de grenzen in de integraal ook te schrijven als c resp. $c + 2L$.

De Fourierexpansie convergeert naar $f(x)$ als $f(x)$ continu is in x en naar $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ als $f(x)$ discontinu is in x. Hierin is $f(x+0)$ de rechterlimiet en $f(x-0)$ de linkerlimiet van $f(x)$ in x.

Een functie is **even** als geldt:

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Een functie is **oneven** als geldt:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \bigg| f(-x) = f(x)$$

Substitutie van $x = -u$ geeft: $a_n = -\frac{1}{L}\int\limits_{L}^{0} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du + \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \Leftrightarrow$

$$a_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \bigg| f(-x) = f(x)$$

Substitutie van $x = -u$ geeft: $b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{L}^{0} f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du + \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$

Een even functie kan dus geschreven worden als:

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx}$$

Analoog geldt voor een oneven functie: $a_n = 0$ en $b_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \rightarrow$

Een oneven functie $f(x)$ kan geschreven worden als:

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx}$$

$$\int\limits_{-L}^{L} f^2(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\} \Leftrightarrow$$

$$\int\limits_{-L}^{L} f^2(x)dx = \tfrac{1}{2}La_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(La_n^2 + Lb_n^2) \rightarrow$$

<u>**Formule van Parseval**</u>:

$$\boxed{\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f^2(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

Als $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ convergeert, dan geldt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0}$$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2}a_n(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) + \frac{b_n}{2i}(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\tfrac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + (a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L}\right\}$$

Stel: $\frac{1}{2}a_0 = c \wedge \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_n \wedge \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n} \rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}}$$

Hierin is $c_n = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx \rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx}$$

Stel: $f(x) = x^2 \mid 0 < x < 2\pi \wedge 2L = 2\pi \rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} x^2 dx = \tfrac{8}{3}\pi^2 \rightarrow$$

$$x^2 = \tfrac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right) \rightarrow f(0) = \tfrac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \tfrac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2 \rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \tfrac{1}{6}\pi^2}$$

Stel: $f(x) = \sin x \mid 0 < x < \pi \wedge 2L = 2\pi \rightarrow$
Daar $f(x)$ een even functie is, is $b_n = 0$ en geldt voor a_n:

$$a_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\cos nx dx \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\} = -\frac{2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)}\Bigg|\, n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\cos x dx = 0 \;\wedge\; a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi} \rightarrow$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1} - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right)}$$

<u>Stel</u>: $f(x) = \cos x \mid 0 < x < \pi \wedge 2L = 2\pi \rightarrow$
Daar $f(x)$ een oneven functie is, is $a_n = 0$ en geldt voor b_n:

$$b_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos x\sin nx dx \Leftrightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \{\sin(x+nx)-\sin(x-nx)\}dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos n\pi}{1+n} - \frac{\cos n\pi}{1-n} + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right\} \Leftrightarrow$$

$$b_n = \frac{2n(\cos n\pi + 1)}{\pi(n^2-1)} = \frac{2n[(-1)^n+1]}{\pi(n^2-1)} \wedge b_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos x\sin x dx = 0 \rightarrow$$

$$\cos x = \frac{2n[(-1)^n+1]}{\pi(n^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$$

Substitutie van $n = 2n$ geeft: $\dfrac{4n[(-1)^{2n}+1]}{\pi(4n^2-1)}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2nx \;\Bigg|\; n \in I\!N\backslash\{0,1\} \rightarrow$

$$\boxed{\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{4\cdot 1^2-1} + \frac{2\sin 4x}{4\cdot 2^2-1} + \frac{3\sin 6x}{4\cdot 3^2-1} + \cdots\right)}$$

<u>Stel</u>: $f(x) = x \mid 0 < x < 2 \wedge 2L = 4 \rightarrow$
Als $f(x)$ wordt opgevat als een oneven functie, dan geldt:

$$a_n = 0 \wedge b_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int\limits_0^2 x\sin\tfrac{1}{2}n\pi x dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi \rightarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin\tfrac{1}{2}n\pi x = \frac{4}{\pi}(\sin\tfrac{1}{2}\pi x - \tfrac{1}{2}\sin\pi x + \tfrac{1}{3}\sin\tfrac{3}{2}\pi x - \cdots)}$$

Als $f(x)$ wordt opgevat als een even functie, dan geldt:

$$a_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int\limits_0^2 x\cos\tfrac{1}{2}n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \; \Bigg| \; n \neq 0$$

$$b_n = 0 \wedge a_0 = \int\limits_0^2 x dx = 2 \rightarrow$$

$$\boxed{x = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\cos\tfrac{1}{2}n\pi x = 1 - \frac{8}{\pi^2}(\cos\tfrac{1}{2}\pi x + \tfrac{1}{9}\cos\tfrac{3}{2}\pi x + \tfrac{1}{25}\cos\tfrac{5}{2}\pi x + \cdots)}$$

Substitutie van $a_0 = 2$, $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$ en $L = 2$ in de Formule van Parseval geeft:

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} x^2 dx = 2 + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos n\pi - 1)^2}{n^4} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

Stel: $S = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \cdots \rightarrow S = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{6^4} + \cdots \Leftrightarrow$

$$S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16} \rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}x\cos nx = \{\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\} \rightarrow \\
&\sin\tfrac{1}{2}x(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos Mx) = \tfrac{1}{2}\{(\sin\tfrac{3}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x) + (\sin\tfrac{5}{2}x - \sin\tfrac{3}{2}x) + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (\sin(M+\tfrac{1}{2})x - \sin(M-\tfrac{1}{2})x)\} \Leftrightarrow \\
&\sin\tfrac{1}{2}x(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos Mx) = \tfrac{1}{2}\{\sin(M+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x\} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos Mx = \frac{\sin(M+\tfrac{1}{2})x}{2\sin\tfrac{1}{2}x} \rightarrow$$

$$\boxed{\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(M+\tfrac{1}{2})x}{\sin\tfrac{1}{2}x}dx = \pi}$$

Een verzameling functies $\phi_k(x) \mid k \in I\!N^+$ is **orthonormaal** in (a, b) als geldt:

$$\boxed{\int\limits_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn}}$$

Een **orthonormale reeks** $f(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \mid a \leq x \leq b}$$

Stel: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$ convergeert uniform naar $f(x)$ in $(a,b) \to$

$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx$

Als $\{\phi_n(x)\}$ onderling orthonormale functies in (a,b) zijn, dan geldt:

$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{mn} \to \int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = c_m \to$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}$$

De functies $\psi_m(x)$ en $\psi_n(x)$ zijn orthonormaal m.b.t. de functie $w(x) \geq 0$ als geldt:

$$\boxed{\int_a^b w(x)\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}}$$

Hierin is $w(x)$ een dichtheidsfunctie ofwel gewichtsfunctie, en is de verzameling $\{\sqrt{w(x)}, \phi_n(x)\}$ orthonormaal in (a,b).

Stel: $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du \wedge b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du \to$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du + \sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du\right\} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)du$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|du$ convergeert $\Rightarrow \lim_{L\to\infty} f(x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)du$

Stel: $\Delta\alpha = \frac{\pi}{L} \wedge F(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)du \to$

$$f(x) = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha F(n\Delta\alpha) = \int_0^{\infty} F(\alpha)d\alpha \qquad (\Delta\alpha \to 0 \Rightarrow \cos(u-x) \to 1) \to$$

Fourier integraaltheorema:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)du}$$

Analoog aan de Fourierexpansie van een functie $f(x)$ is dit ook te schrijven als:
$f(x) = \int_0^\infty \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\}d\alpha$

Hierin is $A(\alpha) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx$ en $B(\alpha) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx \rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx\right\} d\alpha}$$

Als $f(x)$ in x discontinu is, dan geldt: $f(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\{e^{i\alpha x}e^{-i\alpha u} + e^{-i\alpha x}e^{i\alpha u}\}d\alpha du \rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\alpha}d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du}$$

Als $f(x)$ een even resp. oneven functie is, dan geldt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos x\alpha d\alpha \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du & \mid f(x) \text{ even} \\ & \mid \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \sin x\alpha d\alpha \int_0^\infty f(u)\sin\alpha u du & \mid f(x) \text{ oneven} \end{array}}$$

De **Fouriergetransformeerde** $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ van $f(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du}$$

De **inverse Fouriergetransformeerde** $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$ van $F(\alpha)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-ix\alpha}d\alpha}$$

Voor even functies geldt dan:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_c(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du \\ \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos x\alpha d\alpha \end{array}}$$

Voor oneven functies geldt:

$$\boxed{\begin{aligned} F_s(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \sin \alpha u du \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\alpha) \sin x\alpha d\alpha \end{aligned}}$$

De **convolutie** $f * g$ van 2 functies $f(x)$ en $g(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du}$$

De convolutie is commutatief:

$$\boxed{f * g = g * f}$$

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g) e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

<u>Stel</u>: $u + v = x \to \mathcal{F}\{f * g\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{i\alpha u} e^{i\alpha v} dv \Leftrightarrow$

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} du \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{i\alpha v} dv \to$$

<u>**Convolutietheorema voor Fouriertransformaties**</u>:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}}$$

<u>Stel</u>: $F(\alpha)$ en $G(\alpha)$ is de Fouriergetransformeerde van $f(x)$ resp. $g(x) \to$

$$\mathcal{F}\{f * g\} = F(\alpha) G(\alpha) \to f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) G(\alpha) e^{-ix\alpha} d\alpha$$

<u>Stel</u>: $g(x) = \overline{f(x)} \to G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i\alpha x} dx = \overline{F(\alpha)} \to$

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \overline{f(x-u)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \overline{F(\alpha)} e^{-ix\alpha} d\alpha$$

Substitutie van $x = 0$ en $u = x$ geeft de <u>**Formule van Parseval voor Fouriertransformaties**</u>:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha}$$

Stel: $f(x) = \begin{cases} 1 \mid |x| < a \\ 0 \mid |x| > a \end{cases} \rightarrow$

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{i\alpha u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}}{i\alpha} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\alpha}{\alpha} \Bigg| \alpha \neq 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\alpha}{\alpha} e^{-ix\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1 \mid |x| < a \\ \frac{1}{2} \mid |x| = a \\ 0 \mid |x| > a \end{cases}$$

Substitutie van $e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x$ geeft voor de integraal:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \cos x\alpha}{\alpha} d\alpha - \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \sin x\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \cos x\alpha}{\alpha} d\alpha \rightarrow$$

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \cos x\alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi & \mid |x| < a \\ \frac{1}{2}\pi & \mid |x| = a \\ 0 & \mid |x| > a \end{cases}}$$

Stel: $x = 0 \wedge a = 1 \rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \pi \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \tfrac{1}{2}\pi}$$

Substitutie van $f(x)$ en $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}$ in de Formule van Parseval geeft:

$$\int\limits_{-a}^{a} dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 a\alpha}{\alpha^2} d\alpha = \tfrac{1}{2}\pi a$$

Stel: $\alpha a = x \rightarrow d\alpha = \frac{dx}{a} \wedge \alpha^2 = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2/a} dx = \tfrac{1}{2}\pi a \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \tfrac{1}{2}\pi}$$

Complexe Functietheorie

De som en het produkt van 2 getalkoppels (a, b) en (c, d) met a, b, c, d elementen van $I\!R$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\\(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\end{array}}$$

Tevens geldt per definitie:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a,0)\equiv a\\k(a,b)=(ka,kb)\mid k\in I\!R\end{array}}$$

Uit $(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d)$ volgt voor de aftrekking van (a, b) en $c, d)$:

$$\boxed{(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)}$$

<u>Stel</u>: $(a, b) \cdot (x, y) = (c, d) \rightarrow (ax - by, ay + bx) = (c, d) \rightarrow \left\{\begin{array}{l}ax-by=c\\ay+bx=d\end{array}\right. \rightarrow$

$x = \dfrac{ac + bd}{a^2 + b^2} \wedge y = \dfrac{ad - bc}{a^2 + b^2}$

Uit $(x, y) = (c, d)/(a, b)$ volgt nu voor de deling van (c, d) en (a, b):

$$\boxed{\frac{(c,d)}{(a,b)}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)}$$

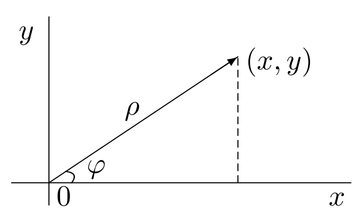
$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$
$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \rightarrow$

$$\boxed{i^2=-1}$$

Hierin is i de **imaginaire eenheid**, waarvoor geldt:

$$\boxed{\begin{array}{ll|l}i^{4n}&=1&\\i^{4n+1}&=i&n\in I\!N^+\\i^{4n+2}&=-1&\\i^{4n+3}&=-i&\end{array}}$$

De getalkoppels $z = (a, b) = a+bi$ heten **complexe getallen** en vormen de verz. $\mathbb{C}$, waarvan $I\!R$ een deelverz. is. In $\mathbb{C}$ bestaat geen ordeningsrelatie. Meetkundig is z voor te stellen d.m.v. een vector in het zgn. **complexe vlak**, waarbij de X-as de reële as en de Y-as de imaginaire as is. Van het complexe getal $z = x+iy$ het x het reële deel en y het imaginaire deel:



$$\boxed{x=\mathrm{Re}\,z\quad\wedge\quad y=\mathrm{Im}\,z}$$

Uit $x = \rho\cos\varphi$ en $y = \rho\sin\varphi$ volgt:

$$\boxed{z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ heet de **modulus** van z, $\varphi = \arg z$ het **argument** van z.
$-\pi < \varphi \leq \pi \Rightarrow \varphi$ heet de **hoofdwaarde** van $\arg z$.

Voor de vermenigvuldiging van z_1 en z_2 geldt nu:
$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \rightarrow$

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}}$$

De **complex geconjugeerde** ofwel **toegevoegd complexe** z^* van z wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{z^* = x - iy}$$

Daar z^* het spiegelbeeld van z t.o.v. de X-as is, geldt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |z| = |z^*| & zz^* = |z|^2 \\ (z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^* & z + z^* = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z \\ (z_1 z_2)* = z_1^* z_2^* & z - z^* = 2yi = 2i\,\mathrm{Im}\,z \end{array}}$$

$|\prod\limits_{l=1}^{n} z_l| = \prod\limits_{l=1}^{n} |z_l| \wedge \arg \prod\limits_{l=1}^{n} z_l = \sum\limits_{l=1}^{n} \arg z_l \mid n \in I\!N \rightarrow |z^n| = |z|^n \wedge \arg z^n = n \arg z \rightarrow$
$z^n = \{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
Voor $\rho = 1$ volgt hieruit de **Stelling van de Moivre**:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \mid n \in I\!N}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\cdot\frac{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\}}$$

De **binomiaalvergelijking** met complexe coëfficiënten is van de vorm:

$$\boxed{z^n = c} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

Stel: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ is een oplossing $\rightarrow \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho^n\cos n\varphi = r\cos\alpha \\ \rho^n\sin n\varphi = r\sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = (\alpha + 2k\pi)/n \mid k \in Z\!\!Z \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \Bigg| \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Voor $y \in I\!R$ wordt e^{iy} gedefinieerd als:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y}$$

Voor $z = x + iy$ volgt hieruit voor de exponentiële functie van een complexe variabele:
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \rightarrow$

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

Uit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ volgt dan:

$$\boxed{z = \rho e^{i\varphi}}$$

Substitutie van $y = \pi$ in $e^{iy} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ geeft:

$$\boxed{e^{\pi i} = 1}$$

Optelling resp. aftrekking van $e^{i\varphi}$ en $e^{-i\varphi}$ geeft:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad \wedge \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$$

De sinus en cosinus van een complexe variabele worden nu gedefinieerd als:

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \wedge \quad \cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})}$$

Stel: $w = e^z \rightarrow |w| = e^x \rightarrow x = \ln|w| \wedge y = \arg w + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$$\boxed{w = e^x \Rightarrow z = \ln|w| + i\arg w + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}}$$

Als $(\arg w + 2k\pi) \in <-\pi, \pi]$, dan is z eenduidig bepaald.
De **complexe logaritme** van w wordt nu gedefinieerd als:

$$\boxed{\log w = \ln|w| + i\arg w}$$

$\log w \mid \arg w \in <-\pi, \pi]$ heet de **hoofdwaarde** van de logaritme en vormt de logaritmische functie van een complexe variabele $z \rightarrow \log z$.

Uit $\log(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = i\pi$ volgt:

$$\boxed{\log(-A) = \log A + \pi i \mid A \in \mathbb{R}}$$

Uit $\log(\pm i) = \ln|\pm i| + i\arg(\pm i)$ volgt:

$$\boxed{\log(\pm i) = \pm\tfrac{1}{2}\pi i}$$

Een functie f van een complexe veranderlijke z kan geschreven worden als:

$$\boxed{f(z) = u(x,y) + iv(x,y)}$$

Hierin zijn u en v reële functies van x en y.

Als $f(z)$ een enkelwaardige functie van z is, dan wordt de afgeleide $f'(z)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}}$$

Hierbij dient de limiet te bestaan onafhankelijk van de wijze waarop Δz naar nul nadert.
Als $f'(z)$ voor elke $z \in \mathcal{R}$, met $\mathcal{R} \in \mathbb{C}$ bestaat, dan heet $f(z)$ **analytisch** in $\mathcal{R}$; $f(z)$ moet dan enkelwaardig en continu zijn.

Een noodzakelijke voorwaarde voor het analytisch zijn van $f(z)$ is dat $u(x,y)$ en $v(x,y)$ voldoen aan de zgn.**Cauchy-Riemannvergelijkingen**:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Als de afgeleiden tevens continu zijn, dan is $f(z)$ analytisch.
De afgeleide van $f(z)$ is nu te schrijven als:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Differentiatie van de Cauchy-Riemannvergelijkingen naar x resp. y geeft:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$$

Als $f(z)$ analytisch is, dan zijn $u(x,y)$ en $v(x,y)$ dus harmonische functies.

De integraal van een enkelwaardige en continue functie $f(z)$ langs een pad C in $\mathcal{R}$ van z_1 naar z_2 wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u+iv)(dx+idy) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (udx - vdy) + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (vdx + udy)}$$

Hieruit volgt voor een gesloten kromme C die een gebied $\mathcal{R}$ begrensd:

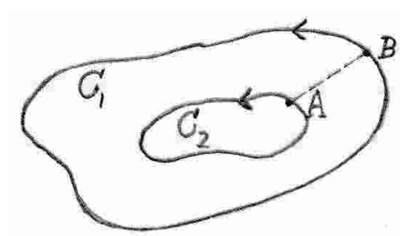
$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

Als $f(z)$ analytisch is binnen en op C, dan gelden de Cauchy-Riemannvergelijkingen $\rightarrow$

Stelling van Cauchy:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0}$$

$\int_{P_1}^{P_2} f(z)dz$ is dan onafhankelijk van de weg tussen P_1 en P_2.



Als $f(z)$ analytisch is in $\mathcal{R}$ en op C_1 en C_2, dan geldt:

$$\oint_{C_2ABC_1BA} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow$$

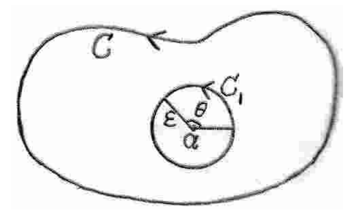
$$\oint_{C_2} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz}$$

Daar de functie $(z-a)^{-n}$ analytisch is in een gebied $\mathcal{R}$ en op C en op de cirkel C_1 met straal ε, geldt: $\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$, met a een willekeurig punt in $\mathcal{R}$ en met MP van C_1.

Voor C_1 geldt: $|z-a| = \varepsilon \to z-a = \varepsilon e^{i\theta} \to dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \to$

$$\oint\limits_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = 0 \;\Bigg|\; n = 2,3,4,\ldots$$



$$n = 1 \Rightarrow \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = i \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$n = 0,-1,-2,\ldots \Rightarrow \frac{1}{(z-a)^n}$ is analytisch binnen $C_1 \to \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \to$

$$\boxed{\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i \mid n = 1 \\ 0 \quad \mid n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\} \end{cases}}$$

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

<u>Stel</u>: $z - a = \varepsilon e^{i\theta} \to \oint\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int\limits_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$

Als $f(z)$ analytisch is, dan is deze tevens continu, waaruit volgt:

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} i \int\limits_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int\limits_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a) \to$

<u>**Integraalformule van Cauchy**</u>:

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-a} dz}$$

Differentiatie van de integrand naar a geeft: $f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$; analoog voor hogere afgeleiden $\to$

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz}$$

Als een functie $f(z)$ dus bekend is op een gesloten kromme C, dan is $f(z)$ ook bekend binnen C, en als $f(z)$ een eerste afgeleide heeft, dan bestaan tevens alle hogere afgeleiden.

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-a-h} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} +$$

$$\frac{h^{n+1}}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

Als C een cirkel is met straal R en MP $z = a$ en $a + h$ een willekeurig punt binnen C, dan nadert de laatste term voor $n \to \infty$ naar nul; $f(a+h)$ is dan te schrijven als een Taylorreeks:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots}$$

Uit substitutie van $h = z - a$ volgt:

$$\boxed{f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots}$$

Een **singulier punt** van een functie $f(z)$ is een punt waarin $f(z)$ niet analytisch is. Een **geïsoleerde singulariteit** $z = a$ van $f(z)$ is een punt waarin $f(z)$ niet analytisch is, terwijl $f(z)$ overal elders in een gebied rond dit punt wèl analytisch is.
Als $f(z) = \phi(z)(z-a)^{-n} \mid n \in I\!N^+, \phi(a) \neq 0$, waarbij $\phi(z)$ overal continu is in een gebied rond $z = a$, dan heeft $f(z)$ een geïsoleerde singulariteit in $z = a$ genaamd een **pool van de n-de orde**.
Als $f(z)$ analytisch is op en binnen een cirkel C met MP $z = a$ en een pool van de n-de orde heeft in $z = a$, dan is $(z-a)^n f(z)$ analytisch op en binnen C en is $f(z)$ te schrijven als een zgn. **Laurentreeks**:

$$\boxed{f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots}$$

Hierin vormen de breuktermen het **hoofddeel** en de overige termen het **analytisch deel** van $f(z)$; de coëfficient a_{-1} heet het **residu** van $f(z)$ in $z = a$.
Elke functie die analytisch is in een gebied begrensd door 2 concentrische cirkels met MP $z = a$ kan als een Laurentreeks ontwikkeld worden.

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}dz + \cdots + \oint\limits_C \frac{a_{-1}}{z-a}dz + \oint\limits_C \{a_0 + a_1(z-a) + \cdots\}dz = 2\pi i a_{-1}$$

Algemeen geldt de **Residuenstelling**: als $f(z)$ analytisch is op en binnen een gesloten kromme C m.u.v. een eindig aantal polen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ met residuen $r_1, r_2, r_3, \ldots$, dan is de integraal van $f(z)$ gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen van $f(z)$ in de polen binnen C:

$$\boxed{\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} r_i}$$

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots \to$$

$$\lim_{x \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\} = (n-1)! a_{-1}$$

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{x \to a} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}}$$

Voor enkelvoudige polen volgt hieruit:

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{x \to a}(z-a)f(z)}$$

Bij integralen van de vorm $\int\limits_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ is θ op te vatten als het argument van een punt $z = e^{\theta i} \mid 0 \le \theta \le 2\pi$ op de eenheidscirkel C. Substitutie van $\sin\theta = (z - z^{-1})/2i$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ en $d\theta = dz/iz$ geeft dan:

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \int\limits_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}}$$

Substitutie van $z = e^{i\theta}$ en $d\theta = dz/iz$ in $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} \;\Bigg|\; a > 1$ geeft:

$$\oint\limits_C \frac{dz/iz}{a + [(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i]} = \oint\limits_C \frac{2iz}{z^2 + 2aiz - 1} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint\limits_C \frac{2dz}{z^2 + 2aiz - 1} = \oint\limits_C \frac{dz}{(z - a_1)(z - a_2)}$$

Als C de pos. georiënteerde eenheidscirkel in het complexe vlak is, dan ligt alleen de pool $a_1 = -i(a - \sqrt{a^2 - 1})$ binnen $C \rightarrow$

$$a_{-1} = \lim_{z \to a_1}(z - a_1)\frac{2}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{2}{a_1 - a_2} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}} \rightarrow$$

$$\oint\limits_C \frac{2dz}{(z - a_1)(z - a_2)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}};\text{ analoog voor } \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} \;\Bigg|\; a > 1 \rightarrow$$

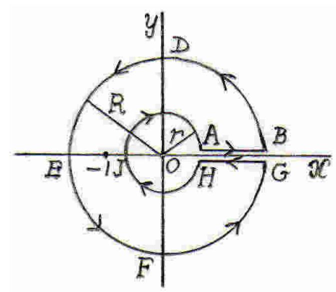
$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \;\Bigg|\; a > 1}$$

Analoog geldt voor $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}$ en $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}$:

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \;\Bigg|\; -1 < a < 1}$$

<u>Stel</u>: $w = \sqrt{z} \rightarrow$ Substitutie van $z = e^{i\theta}$ geeft: $w = e^{\frac{1}{2}\theta i} \rightarrow$
Als een punt in het z-vlak linksom langs de cirkel $|z| = 1$ over 2π is geroteerd, dan is $z = e^{2\pi i} = 1$ en $w = e^{\pi i} = -1$, d.w.z. het beeldpunt in het w-vlak komt niet overeen met het overeenkomstige punt in het z-vlak. Pas na een rotatie over 4π geldt $z = 1$ en $w = 1$. Dit betekent dat de functie $w = \sqrt{z}$ een **dubbelwaardige functie** is. Voor $0 \le \theta < 2\pi$ òf $2\pi \le \theta < 4\pi$ is w wel als een enkelwaardige functie op te vatten. Het punt $z = 0$ heet een **vertakkingspunt** en de X-as een **vertakkingslijn**.

De integraal $\oint\limits_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$ heeft een vertakkingspunt in $z=0$ en een pool in $z=-1$ die binnen C ligt. Voor het residu in $z=-1$ geldt dan: $a_{-1}=\lim\limits_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z}=(-1)^{p-1}=(e^{\pi i})^{p-1}\to$



$$\oint\limits_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz=\int\limits_{AB}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz+\int\limits_{BDEFG}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz+\int\limits_{GH}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz+\int\limits_{HJA}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=2\pi i(e^{\pi i})^{p-1}\Leftrightarrow$$

$$\int\limits_r^R\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int\limits_0^{2\pi}\frac{(Re^{\theta i})^{p-1}iRe^{\theta i}}{1+Re^{\theta i}}d\theta+\int\limits_R^r\frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx+\int\limits_0^{2\pi}\frac{(re^{\theta i})^{p-1}ire^{\theta i}}{1+re^{\theta i}}d\theta=2\pi i(e^{\pi i})^{p-1}$$

Als $r\to 0$ en $R\to\infty$, dan naderen de 2-de - en de 4-de integraal naar nul $\to$

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int\limits_\infty^0\frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx=\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx-e^{2\pi i(p-1)}\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i(e^{\pi i})^{p-1}\Leftrightarrow$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}}=\frac{2\pi i}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}}\to$$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad\Big|\quad 0<p<1}$$

Uit $\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$ volgt:

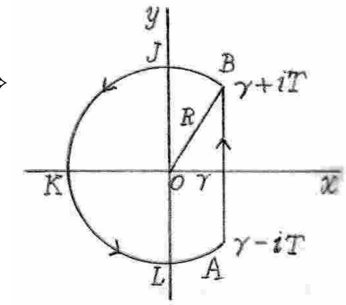
$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad\Big|\quad 0<p<1}$$

Voor de Laplacegetransformeerde $F(s)$ van een functie $f(t)$ geldt: $F(s)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt\to$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}F(s)e^{su}ds=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\int\limits_0^\infty f(t)e^{su-st}dtds$$

Stel: $s=\gamma+iy|y\in I\!R\to\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}F(s)e^{su}ds=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T^{-T}\int\limits_0^\infty f(t)e^{\gamma u+iyu}e^{-\gamma t-iyt}dtidy\Leftrightarrow$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}F(s)e^{su}ds=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{\gamma u}}{2\pi i}\int\limits_{-T}^{T}e^{iyu}dy\int\limits_{0}^{\infty}e^{-iyt}\{e^{-yt}f(t)\}dt\Leftrightarrow$$



$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}F(s)e^{su}ds=\begin{cases}(e^{\gamma u}/2\pi)2\pi e^{-\gamma u}f(u) & \mid u>0\\ 0 & \mid u<0\end{cases}\rightarrow$$

<u>**Complexe inversieformule**</u> of <u>**Bromwich integraalformule**</u>:

$$\boxed{f(u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(s)e^{su}ds\;\Bigg|\; u>0}$$

Hierbij is γ een reëel getal zo, dat $s=\gamma$ rechts van alle singuliere punten ligt.

De integraal is te schrijven als een contourintegraal: $f(u)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C F(s)e^{su}ds$

Hierin is $C=\overline{AB}+\text{bg}BJKLA$.

$T=\sqrt{R^2-\gamma^2}\rightarrow T\rightarrow\infty\Rightarrow R\rightarrow\infty\rightarrow$

$$f(u)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(s)e^{su}ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C F(s)e^{su}ds-\int_\Gamma F(s)e^{su}ds\right\}$$

Hierin is $\Gamma=\text{bg}BJKLA$.

Als er constante getallen $M,k>0$ bestaan zo, dat op Γ geldt dat $|F(s)|<\dfrac{M}{R^k}$, dan is $\lim\limits_{R\to\infty}\int_\Gamma F(s)e^{su}ds=0$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)e^{su}ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}F(s)e^{su}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(s)e^{su}ds$$

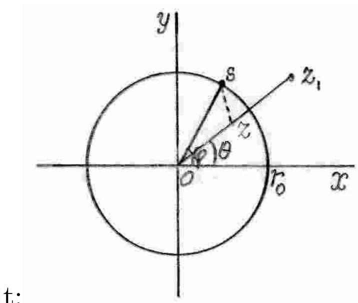
Uit de Residuenstelling volgt: $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C F(s)e^{su}ds=$ som van de residuen van $F(s)e^{su}$ in alle polen van $F(s)$ binnen $C\rightarrow$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}F(s)e^{su}ds=\sum\{\text{residuen } F(s)e^{su}\text{ in polen } F(s)\}-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(s)e^{su}ds\rightarrow$$

$$\boxed{f(u)=\sum\text{ residuen van } F(s)e^{su}\text{ in alle polen van } F(s)\text{ binnen } C}$$

Substitutie van $a=z$ en $z=s$ in de integraalformule van Cauchy geeft:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds$$



Hierin is C_0 een cirkel met vergelijking $s = r_0 e^{i\varphi} \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \to$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(s)}{s-z} i r_0 e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{s f(s)}{s-z} d\varphi$$

Als z_1 het inverse punt is van $z = re^{i\theta} \mid 0 < r < r_0$ t.o.v. C_0, dan geldt:

$$|z_1||z| = r_0^2 \to |z_1| = \frac{r_0^2}{r} \Leftrightarrow |z_1| e^{i\theta} = \frac{r_0^2}{r} e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 = \frac{r_0^2}{z^*} = \frac{ss^*}{z^*}$$

Daar z_1 buiten C_0 ligt, is $f(z)$ te schrijven als: $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1} \right) f(s) d\varphi$

$$\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1} = \frac{s}{s-z} - \frac{1}{1-(s^*/z^*)} = \frac{s}{s-z} - \frac{z^*}{z^*-s^*} = \frac{s}{s-z} + \frac{z^*}{s^*-z^*} = \frac{r_0^2 - r^2}{|s-z|^2} \to$$

$$\boxed{f(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) f(r_0 e^{i\varphi})}{|s-z|^2} d\varphi}$$

Uit $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ volgt de **Poisson integraalformule**

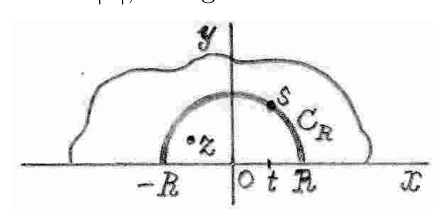
$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) u(r_0, \varphi)}{r_0^2 - 2r_0 \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi}$$

Deze formule definieert een lineaire integraaltransformatie van $u(r_0, \varphi)$ naar $u(r, \theta)$ met als kern de **Poissonkern** $P(r_0, r, \varphi - \theta)$, waarvoor geldt:

$$\boxed{P(r_0, r, \varphi - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi}$$

Stel: $f(z)$ is een analytische functie op het halfvlak $\operatorname{Im} z \ge 0$ zo, dat $|z^k f(z)| < M \mid k, M \in I\!R^+$ als C_R een halve cirkel is met straal R en middelpunt O, met $R > |z|$, dan geldt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-z} dt$$



Daar $|f(s)| < \frac{M}{R^k}$, nadert de 1-ste integraal naar nul voor $R \to \infty \to$

Cauchy integraalformule voor het halfvlak:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \Big| \quad \operatorname{Im} z > 0}$$

Daar $f(z) = 0$ als z beneden de X-as ligt, is $f(z)$ te schrijven als:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} + \frac{c}{t-z^*} \right) f(t)dt \ \Bigg| \ \mathrm{Im}\, z > 0, c \in I\!R$$

Substitutie van $c = -1$ en $c = 1$ geeft: $f(z) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{|t-z|^2} dt$ resp. $f(z) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x)f(t)}{|t-z|^2} dt$

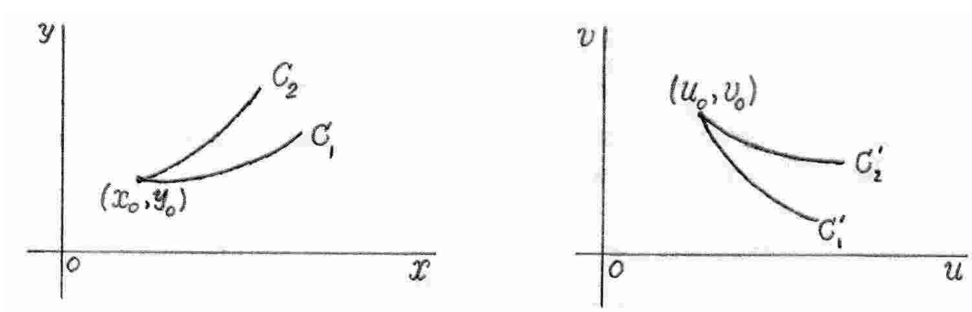
Uit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ volgt dan de **Schwarz integraalformule**:

$$\boxed{u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \ \Bigg| \ y > 0}$$

Voor $v(x, y)$ geldt:

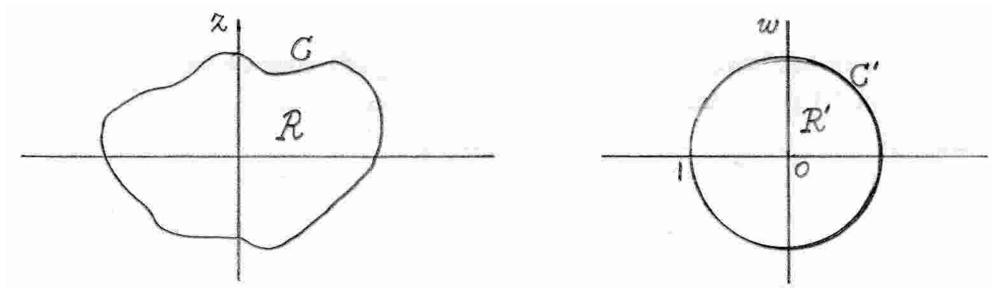
$$\boxed{v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)u(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \ \Bigg| \ y > 0}$$

De analytische functie $w = u(x, y) + iv(x, y)$ is een transformatie die punten in het uv-vlak met punten in het xy-vlak koppelt. Als de transformatie $w = f(z)$ het punt (x_0, y_0) afbeeldt op het punt (u_0, v_0), waarbij de krommen C_1 en C_2 (die elkaar in (x_0, y_0) snijden) worden afgebeeld op de krommen C_1' resp. C_2' (die elkaar in (u_0, v_0) snijden) en daarbij de hoek tussen C_1 en C_2 in (x_0, y_0) zowel in grootte als oriëntatie dezelfde is als de hoek tussen C_1' en C_2' in (u_0, v_0), dan heet de transformatie een **conforme afbeelding**.



Als in een gebied $\mathcal{R}$ $f(z)$ analytisch is en $f'(z) \neq 0$, dan is de afbeelding $w = f(z)$ conform in elk punt van $\mathcal{R}$.
Onder confome afbeeldingen worden kleine gebieden rond een punt z_0 in het z-vlak gelijkvormig in het w-vlak afgebeeld, alsmede vergroot (of verkleind) met een factor van ong. $|f'(z)|^2$. Analoog voor korte afstanden, waarbij de factor ong. $|f'(z_0)|$ is.

Als C een gesloten kromme in het z-vlak is die een gebied $\mathcal{R}$ omsluit en C' de eenheidscirkel die een eenheidsschijf $\mathcal{R}'$ in het w-vlak omsluit, dan geldt volgens het **Afbeeldingstheorema van Riemann** dat er een analytische functie $w = f(z)$ in $\mathcal{R}$ bestaat die elk punt van $\mathcal{R}$ in juist 1 punt van $\mathcal{R}'$ afbeeldt, alsmede elk punt van C in juist 1 punt van C'.



Als $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analytisch is in een gebied $\mathcal{R}$, dan geldt:
$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y \quad \wedge \quad \partial v/\partial x = -\partial u/\partial y \rightarrow$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & -\partial v/\partial x \\ \partial v/\partial x & \partial u/\partial x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2}$$

Als α en β complexe - en a en θ_0 reële constanten zijn, dan geldt voor de volgende algemene transformaties:

1. **Translatie**: een verschuiving in de richting van de vector β:

$$\boxed{w = z + \beta}$$

2. **Rotatie**: een draaiing over een hoek θ_0

$$\boxed{w = e^{\theta_0 i} z}$$

3. **Strekking**: een vergroting ($a > 1$) of verkleining ($0 < a < 1$):

$$\boxed{w = az}$$

4. **Inversie**: een afbeelding t.o.v. een kromme:

$$\boxed{w = z^{-1}}$$

5. **Lineaire transformatie**: een combinatie van 1, 2 en 3:

$$\boxed{w = \alpha z + \beta}$$

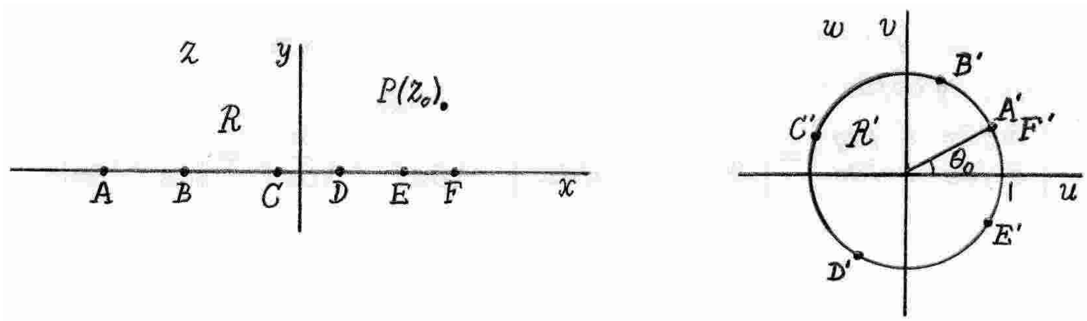
6. **Bilineaire - Gebroken transformatie**: een combinatie van 1, 2, 3 en 4:

$$\boxed{w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \;\Big|\; \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0}$$

Als $P(z_0)$ een punt is in het bovenste helve z-vlak $\mathcal{R}$, dan geldt voor de transformatie w die elk punt van $\mathcal{R}$ op juist 1 punt van het binnengebied $\mathcal{R}'$ van de eenheidscirkel $C' : |w| = 1$ in het w-vlak afbeeld:

$$\boxed{w = e^{\theta_0 i}\frac{z - z_0}{z - z_0^*}}$$

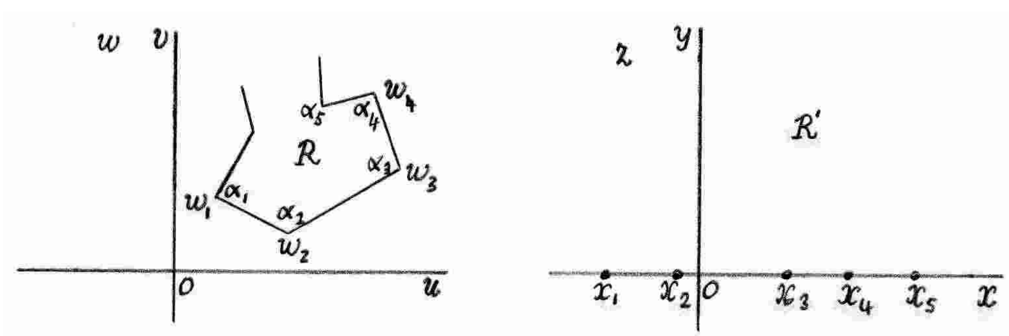
Elk punt van de X-as wordt hierbij afgebeeld op C'.



Als de hoekpunten $w_1, w_2, \ldots, w_n$ met corresponderende inwendige hoeken $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ van een polygoon P in het w-vlak worden afgebeeld op de punten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van de reële X-as in het z-vlak, dan wordt de transformatie w die het inwendige gebied $\mathcal{R}$ van P afbeeld op het bovenste halfvlak $\mathcal{R}'$ van het z-vlak en de omtrek van P op de X-as, gegeven door de **<u>Schwarz-Christoffel transformatie</u>**:

$$\boxed{w = A\int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}\cdots(z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}dz + B}$$

Hierin zijn A en B complexe constanten die de afmeting, oriëntatie en ositie van P bepalen. Drie van de punten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kunnen willekeurig gekozen worden, waarbij i.h.a. x_n in het oneindige genomen wordt, zodat de laatste factor met x_n wegvalt.



Daar de som van de buitenhoeken van een *gesloten* polygoon 2π is, geldt in dat geval:

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \cdots + (\pi - \alpha_n) = 2\pi \rightarrow \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right) = -2$$

Als $w = f(z) \mid f'(z) \neq 0$ analytisch is, dan wordt de functie $\Phi(x, y)$ getransformeerd in $\Phi[x(u, v), y(u, v)] \rightarrow$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

Daar $u(x,y)$ en $v(x,y)$ harmonische functies zijn, is $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

Uit de Cauchy-Riemannvergelijkingen volgt:

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|^2=|f'(z)|^2$ en

$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)}$$

Een harmonische functie $\Phi(x,y)$ blijft dus harmonisch onder de transformatie $w=f(z)$ als $f(z)$ analytisch is.

Het 4-dimensionale analogon van de complexe getallen wordt gevormd door de **quaternionen**, zijn de geordende viertallen van de vorm $q=(a,b,c,d)\mid a,b,c,d\in I\!R$, die een 4-dimensionale reële vectorruimte vormen.
De som en het produkt van 2 quaternionen (a,b,c,d) en (a',b',c',d') wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\begin{aligned}(a,b,c,d)+(a',b',c',d')=&(a+a',b+b',c+c',d+d')\\(a,b,c,d)\cdot(a',b',c',d')=&\ (aa'-bb'-cc'-dd',ab'+ba'+cd'-dc',ac'-bd'+ca'+db',\\&ad'+bc'-cb'+da')\end{aligned}}$$

Uit de produktdefinitie volgt dat deze niet-commutatief is.

Tevens geldt per definitie:

$$\boxed{\begin{aligned}&(a,0,0,0)\equiv a\\&k(a,b,c,d)=(ka,kb,kc,kd)\mid k\in I\!R\end{aligned}}$$

Uit $(a,b,c,d)-(a',b',c',d')=(a,b,c,d)+(-a',-b',-c',-d')$ volgt voor de aftrekking van (a,b,c,d) en (a',b',c',d'):

$$\boxed{(a,b,c,d)-(a',b',c',d')=(a-a',b-b',c-c',d-d')}$$

Daar de vermenigvuldiging niet-commutatief is, zijn er bij de deling van 2 quaternionen een van elkaar verschillend links - en rechts quotiënt. Het links- resp. rechts quotiënt van $q=(a,b,c,d)$ en $q'=(a',b',c',d')$ is elk quaternion $l=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ resp. $r=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ waarvoor geldt: $l\cdot q=q'$ resp. $q\cdot r=q'\rightarrow$
$l\cdot q=(x_1a-x_2b-x_3c-x_4d,x_1b+x_2a+x_3d-x_4c,x_1c-x_2d+x_3a+x_4b,x_1d+x_2c-x_3b+x_4a)$ resp.
$q\cdot r=(ay_1-by_2-cy_3-dy_4,by_1+ay_2-dy_3+cy_4,cy_1+dy_2+ay_3-by_4,dy_1-cy_2+by_3+ay_4)\rightarrow$

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4 = a' \\ bx_1 + ax_2 + dx_3 - cx_4 = b' \\ cx_1 - dx_2 + ax_3 + bx_4 = c' \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 + ax_4 = d' \end{cases} \wedge \begin{cases} ay_1 - by_2 - cy_3 - dy_4 = a' \\ by_1 + ay_2 - dy_3 + cy_4 = b' \\ cy_1 + dy_2 + ay_3 - by_4 = c' \\ dy_1 - cy_2 + by_3 + ay_4 = d' \end{cases} \rightarrow$$

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} \wedge \Delta_r = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \Leftrightarrow \Delta_l = \Delta_r = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \rightarrow$$

$a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0 \Rightarrow$ juist 1 oplossing in de vorm van l resp. r, met i.h.a. $l \neq r$.
$a^2+b^2+c^2+d^2 = 0 \Rightarrow$ geen eenduidige oplossing.

Stel: $(a',b',c',d') = (1,0,0,0) \rightarrow l \cdot (a,b,c,d) = (1,0,0,0) \wedge (a,b,c,d) \cdot r = (1,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$l = \frac{(1,0,0,0)}{(a,b,c,d)} \wedge r = \frac{(1,0,0,0)}{(a,b,c,d)}$$

De oplossing van beide stelsels vergelijkingen is nu dezelfde, d.w.z. $l = r$, zijnde de inverse q^{-1} van q: $q^{-1} \cdot q = q \cdot q^{-1} = (1,0,0,0)$

Voor $q^{-1} = (a,b,c,d)^{-1}$ geldt dan:

$$\boxed{(a,b,c,d)^{-1} = \left(\frac{a}{Q}, -\frac{b}{Q}, -\frac{c}{Q}, -\frac{d}{Q}\right) \,\Big|\, Q = a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Stel: $b = c = d = 0 \rightarrow Q = a^2 \rightarrow (a,b,c,d)^{-1} = (a,0,0,0)^{-1} = (1/a,0,0,0) \rightarrow$

$$\boxed{(a,0,0,0)^{-1} = (a^{-1},0,0,0)}$$

$(a,b,c,d) = (a,0,0,0) + (0,b,0,0) + (0,0,c,0) + (0,0,0,d) \Leftrightarrow$
$(a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$
Stel: $\vec{e}_1 = (1,0,0,0) \wedge \vec{e}_2 = (0,1,0,0) \wedge \vec{e}_3 = (0,0,1,0) \wedge \vec{e}_4 = (0,0,0,1) \rightarrow$

$$\boxed{(a,b,c,d) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4}$$

$(a,b,c,d) = (a,0,0,0) + (0,b,c,d) = a + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4$
Stel: $\vec{e}_2 = i \wedge \vec{e}_3 = j \wedge \vec{e}_3 = k \rightarrow$

$$\boxed{(a,b,c,d) = a + bi + cj + dk}$$

Hierin geldt voor i, j en k:

$$\boxed{\begin{cases} i^2 = j^2 + k^2 = -1 \\ jk = -kj = i \wedge ki = -ik = j \wedge ij = -ki = k \end{cases}}$$

De inverse van een quaternion (a,b,c,d) is nu te schrijven als:

$$\boxed{(a+bi+cj+dk)^{-1} = \frac{(a-bi-cj-dk)}{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

Stel: $q^* = a - bi - cj - dk \rightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} q + q^* = 2a \\ q \cdot q^* = q^* \cdot q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{cases}}$$

Substitutie van $|q| = |a + bi + cj + dk| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ in q^{-1} geeft:

$$\boxed{q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} l \cdot q = q' \Leftrightarrow (l \cdot q) \cdot q^{-1} = q' \cdot q^{-1} \Leftrightarrow l = q' \cdot q^{-1} \\ q \cdot r = q' \Leftrightarrow q^{-1} \cdot (q \cdot r) = q^{-1} \cdot q' \Leftrightarrow r = q^{-1} \cdot q' \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{l = \frac{q' \cdot q^*}{|q|^2} \quad \wedge \quad r = \frac{q^* \cdot q'}{|q|^2}}$$

Lineaire Algebra

Een **determinant van de 2-de graad** Δ_2 wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Een **determinant van de 3-de graad** Δ_3 wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}}$$

Hierbij is Δ_3 naar de 1-ste kolom ontwikkeld.

Een **minor** ofwel **onderdeterminant** $\mathcal{M}_{ij}$ van het element a_{ij} van een determinant van de n-de graad Δ_n is een determinant van de $(n-1)$-de graad die ontstaat uit Δ_n bij het schrappen van de i-de rij en de j-de kolom.
De **cofactor** $\mathcal{C}_{ij}$ van het element a_{ij} wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\mathcal{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathcal{M}_{ij}}$$

Eigenschappen van determinanten:

I. De getalwaarde verandert niet bij verwisseling van alle rijen met alle overeenkomstige kolomwaarden.

II. Het teken verandert als 2 rijen of 2 kolommen worden verwisseld.

III. De getalwaarde is nul als 2 rijen of 2 kolommen gelijk zijn, als de determinant 2 evenredige rijen of kolommen heeft, of als alle elementen van een rij of kolom nul zijn.

IV. Een determinant wordt vermenigvuldigd met een getal door alle elementen van 1 rij of 1 kolom met dat getal te vermenigvuldigen.

V. Een determinant is gelijk aan de som van de produkten van de elementen van een rij of een kolom met hun bijbehorende cofactoren:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathcal{C}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{C}_{ij}}$$

VI. Een determinant waarvan in een rij of kolom alle elementen op 1 na nul zijn, is gelijk aan het produkt van dat niet-nulelement met zijn cofactor.

VII. Een determinant waarvan de elementen van een rij of kolom veeltermen zijn bestaande uit p termen, is gelijk aan de som van p determinanten die ontstaan door achtereenvolgens de veeltermen te vervangen door de 1-ste, 2-de,$\ldots,p$-de term.

VIII. De getalwaarde van een determinant verandert niet als bij de elementen van een rij (kolom) de overeenkomstige elementen worden opgeteld van 1 of meer andere rijen (kolommen), nadat deze met een getal zijn vermenigvuldigd.

Een **Determinant van Vandermonde** $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ is van de vorm: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Vermenigvuldiging van de $(n-1)$-de kolom met a_1 en aftrekking van het resultaat van de n-de kolom geeft:

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

Herhaling hiervan rechts naar links met alle andere paren opeenvolgende kolommen geeft:

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (a_2 - a_1) & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_n - a_1) & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n - a_1) & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1)\Delta(a_2, \ldots, a_n)$

Dit is een recursievergelijking met een $(n-1)$-de graads Vandermonde determinant $\rightarrow$

$$\boxed{\Delta(a_1, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}$$

<u>Stel</u>: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$, met u_{ij} een functie van $x \rightarrow \dfrac{d\Delta_3}{dx} = \displaystyle\sum_{i,j}^{3} \frac{\partial \Delta_3}{\partial u_{ij}} \cdot \frac{du_{ij}}{dx}$

Daar de partiële afgeleide gelijk is aan de cofactor van het element u_{ij}, volgt hieruit:

$$\frac{d\Delta_3}{dx} = \sum_{i,j}^{3} \mathcal{C}_{ij} \frac{du_{ij}}{dx} = \sum_{i,j}^{3} \mathcal{C}_{ij} u'_{ij} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\Delta_3}{dx} = \mathcal{C}_{11}u'_{11} + \mathcal{C}_{12}u'_{12} + \mathcal{C}_{13}u'_{13} + \mathcal{C}_{21}u'_{21} + \mathcal{C}_{22}u'_{22} + \mathcal{C}_{23}u'_{23} + \mathcal{C}_{31}u'_{31} + \mathcal{C}_{32}u'_{32} + \mathcal{C}_{33}u'_{33} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\Delta_3}{dx} = \begin{vmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u'_{31} & u'_{32} & u'_{33} \end{vmatrix}$$

Algemeen geldt voor de afgeleide van Δ_n naar x dat deze gelijk is aan de som van n determinanten Δ_n waarbij in elke determinant 1 rij vervangen is door de afgeleiden van de elementen van die rij:

$$\boxed{\frac{d\Delta_n}{dx} = \begin{vmatrix} u'_{11} & \cdots & u'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u'_{n1} & \cdots & u'_{nn} \end{vmatrix}}$$

Een $\boldsymbol{(m,n)}$**-matrix** $A = (a_{mn})$ wordt gedefinieerd als een rechthoekige tabel van m rijen en n kolommen: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Een **vierkante matrix** is een matrix waarbij $m = n$, een **rijmatrix** ofwel **rijvector** is een matrix bestaande uit 1 rij, en een **kolommatrix** ofwel **kolomvector** is een matrix bestaande uit 1 kolom.

Twee matrices $A = (a_{jk})$ en $B = (b_{jk})$ zijn gelijk als geldt: $a_{jk} = b_{jk}$

De som van 2 matrices $A = (a_{jk})$ en $B = (b_{jk})$ wordt gedefinieerd als de matrix $A + B$ waarvoor geldt:

$$\boxed{A + B = (a_{jk} + b_{jk})}$$

Het verschil van 2 matrices $A = (a_{jk})$ en $B = (b_{jk})$ wordt gedefinieerd als de matrix $A - B$ waarvoor geldt:

$$\boxed{A - B = (a_{jk} - b_{jk})}$$

Het produkt van een matrix $A = (a_{jk})$ met een getal λ wordt gedefinieerd als de matrix λA waarvoor geldt:

$$\boxed{\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{jk})}$$

De vermenigvuldiging van een (m,n)-matrix $A = (a_{jk})$ met een (n,p)-matrix $B = (b_{jk})$ wordt gedefinierd als de matrix $C = AB$ waarvoor geldt:

$$\boxed{C = AB = (c_{jk}) = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk}}$$

Hierin is C een (m,p)-matrix en is i.h.a. $AB \neq BA$, d.w.z. de matrixvermenigvuldiging is niet-commutatief. Tevens is ze alleen gedefinieerd als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B.

Een matrix A kan alleen met zichzelf vermenigvuldigd worden als A vierkant is. De n-de macht van A is dan te schrijven als:

$$\boxed{A^n = AA^{n-1} \mid n \in I\!N}$$

De **getransponeerde matrix** van een matrix $A = (a_{jk})$ is de matrix A^T die volgt uit verwisseling van de rijen en de kolommen van A:

$$\boxed{A = (a_{jk}) \Rightarrow A^T = (a_{kj})}$$

Voor getransponeerde matrices geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l}(A+B)^T = A^T + B^T\\ (AB)^T = B^T A^T\\ (A^T)^T = A\end{array}}$$

Een **symmetrische matrix** is een matrix waarvoor geldt: $A^T = A$
Een **scheef-symmetrische matrix** is een vierkante matrix A waarvoor geldt: $A^T = -A$

$$\left.\begin{array}{l}(A+A^T)^T = A^T + A = A + A^T \to \frac{1}{2}(A+A^T) \text{ is symmetrisch}\\ (A-A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T) \to \frac{1}{2}(A-A^T) \text{ is scheef-symmetrisch}\end{array}\right\} \to$$

Een reële vierkante matrix A is te schrijven als de som van een reële symmetrische- en een reële scheef-symmetrische matrix:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)}$$

De **complex geconjugeerde matrix** van een matrix $A = (a_{jk})$ is de matrix A^* die volgt uit vervanging van de elementen in A door hun complex geconjugeerde:

$$\boxed{A = (a_{jk}) \Rightarrow A^* = (a^*_{jk})}$$

Een **Hermitische matrix** is een vierkante matrix A waarvoor geldt: $A = (A^*)^T$
Een **scheef-symmetrische Hermitische matrix** is een vierkante matrix A waarvoor geldt: $A = -(A^*)^T$

De **hoofddiagonaal** van een vierkante matrix $A = (a_{jk})$ bestaat uit alle elementen van A waarvoor geldt: $j = k$.
Het **spoor** Tr van een vierkante matrix A is de som van alle elementen van de hoofddiagonaal.

De **eenheidsmatrix** I is een vierkante matrix waarbij alle elementen van de hoofddiagonaal 1 zijn en alle andere elementen nul, waarbij geldt:

$$\boxed{AI = IA = A \quad \wedge \quad I^n = I \mid n \in I\!N}$$

De **nulmatrix** 0 is een vierkante matrix waarvan alle elementen nul zijn.
De **inverse matrix** van een vierkante matrix $A = (a_{jk})$ is de matrix A^{-1} waarvoor geldt:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Als $A = (a_{jk})$ een niet-singuliere n-de orde vierkante matrix is, d.w.z. $\det(A) \neq 0$, en $(\mathcal{C}_{jk})$ is de matrix van cofactoren van A, dan geldt voor de inverse matrix van A:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(\mathcal{C}_{jk})^T}{\det(A)}}$$

Voor inverse matrices geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l}(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\\ (A^{-1})^{-1} = A\end{array}}$$

$AA^{-1} = I \rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1 \rightarrow$

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

Een **orthogonale matrix** is een reële matrix A waarvoor geldt:

$$\boxed{A^T = A^{-1}}$$

Dit is equivalent met:

$$\boxed{A^T A = I}$$

$A^T A = I \rightarrow \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(I) = 1$
Substitutie van $\det(A^T) = \det(A)$ geeft: $[\det(A)]^2 = 1 \rightarrow$
Voor een orthogonale matrix geldt:

$$\boxed{\det(A) = \pm 1}$$

Een **unitaire matrix** is een complexe matrix A waarvoor geldt:

$$\boxed{(A^*)^T = A^{-1}}$$

Dit is equivalent met:

$$\boxed{(A^*)^T A = I}$$

Elke *reële* unitaire matrix is dus een orthogonale matrix.
Het **scalarprodukt** van 2 kolomvectoren A en B wordt gedefinieerd als $(A^*)^T B$.
Twee kolomvectoren A en B zijun **orthogonaal** als geldt: $(A^*)^T B = 0$
Als A een unitaire kolommatrix is, dan geldt: $(A^*)^T A = I = 1$, d.w.z. A is dan een eenheidsvector.

Een verzameling vectoren $\{X_n \mid n \in I\!N\}$ heet een **unitaire verzameling vectoren** als geldt:

$$\boxed{(X^*)_j^T X_k = \left\{ \begin{array}{l} 0 \mid j \neq k \\ 1 \mid j = k \end{array} \right.}$$

Als de vectoren reëel zijn, dan heet de verzameling **orthonormaal**.

Als $A = (a_{jk})$ een (n,n)-matrix is en X een kolomvector, dan is de vergelijking $AX = \lambda X \mid \lambda \in \mathbb{C}$ te schrijven als:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \right.$$

Dit stelsel vergelijkingen heeft alleen dan niet-triviale oplossingen als voor de zgn. **karakteristieke vergelijking** van dit stelsel geldt:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0}$$

Dit is een n-de graads vergelijking in λ waarvan de wortels de **eigenwaarden** van A heten, waarbij met elke eigenwaarde een eigenvector correspondeert.
De karakteristieke vergelijking is ook te schrijven als:

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Als A een Hermitische matrix is en λ een eigenwaarde, dan geldt: $AX = \lambda X \to$
$(X^*)^T AX = \lambda (X^*)^T X \Leftrightarrow X^T A^* X^* = \lambda^* X^T X^* \Leftrightarrow (X^*)^T (A^*)^T X = \lambda^* (X^*)^T X \Leftrightarrow$
$(X^*)^T AX = \lambda^* (X^*)^T X \to (\lambda - \lambda^*)(X^*)^T X = 0 \to \lambda = \lambda^*$, daar $(X^*)^T X \neq 0 \to$
De eigenwaarden van een Hermitische matrix zijn reëel.

$AX = \lambda X \Rightarrow (A^*)^T (X^*)^T = \lambda^* (X^*)^T \to (A^*)^T (X^*)^T AX = \lambda^* \lambda (X^*)^T X$
Als A een unitaire matrix is, dan geldt: $(A^*)^T A = I \to (X^*)^T IX = |\lambda|^2 (X^*)^T X \Leftrightarrow$
$(X^*)^T X (1 - |\lambda|^2) = 0 \to (X^*)^T X \neq 0 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \to |\lambda| = 1 \to$
De eigenwaarden van een unitaire matrix zijn ± 1.

Als λ_1 en λ_2 een eigenwaarde is behorende bij de eigenvectoren X_1 resp. X_2, dan geldt:
$AX_1 = \lambda_1 X_1$ en $AX_2 = \lambda_2 X_2$
Vermenigvuldiging met $(X_2^*)^T$ van de 1-ste en met $(X_1^*)^T$ van de 2-de uitdrukking geeft:
$(X_2^*)^T AX_1 = \lambda_1 (X_2^*)^T X_1$ en $(X_1^*)^T AX_2 = \lambda_2 (X_1^*)^T X_2$
Voor de geconjugeerde van de 1-ste van deze 2 uitdrukkingen geldt: $X_2^T A^* X_1^* = \lambda_1 X_2^T X_1^*$
Hieruit volgt voor de getransponeerde: $(X_1^*)^T (A^*)^T X_2 = \lambda_1 (X_1^*)^T X_2$
Als A een hermitische matrix is, dan geldt: $(X_1^*)^T AX_2 = \lambda_1 (X_1^*)^T X_2 \to$
$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1^*)^T X_2 = 0 \to \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (X_1^*)^T X_2 = 0 \to$
De eigenvectoren van een Hermitische matrix behorende bij verschillende eigenwaarden zijn dus orthogonaal.

Cayley-Hamiltontheorema: Elke vierkante matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking:

$$\boxed{D(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow D(A) = 0}$$

Als $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ een vierkante matrix is waarvan de kolommen de eigenvectoren zijn van een (n,n)-matrix A en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de bijbehorende eigenwaarden zijn, dan geldt:

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \cdots \quad \wedge \quad A \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} \to$$

$$AB = A \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$AB = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \to$$

De **getransformeerde** $B^{-1}AB$ van A door B is een diagonaalmatrix waarvan de diagonaalelementen de eigenwaarden van A zijn en alla andere elementen nul:

$$\boxed{B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ een reële symmetrische matrix is met $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$ en $a_{32} = a_{23}$ en $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dan geldt: $X^T AX = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$X^T AX = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \rightarrow$

Kwadratische vorm:

$$\boxed{X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}$$

<u>Stel</u>: $X = BU$ met $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ en $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ en B een (3,3)-matrix $\rightarrow$

$X^T AX = (BU)^T A(BU) = U^T(B^T AB)U$
Als $B^T AB$ een diagonaalmatrix is, d.w.z. als $B^T = B^{-1}$, dan vallen de kruisprodukten in $X^T AX$ weg $\rightarrow$ **Canonieke vorm**:

$$\boxed{X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2}$$

Een **partitie matrix** A is een (m, n)-matrix die in een aantal blokken verdeeld is; voor 4 blokken geldt:

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$; hierin zijn A_1, A_2, A_3 en A_4 matrices waarvoor geldt:

$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,l+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}$ en $A_4 = \begin{pmatrix} a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,l+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, met $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$

Als B een (m, n)-matrix is die op dezelfde wijze in 4 blokken verdeeld is, d.w.z.

$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, dan geldt voor de som van A en B:

$$\boxed{A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{pmatrix}}$$

Als A een (m, n)-matrix is en B een (n, p)-matrix die beide in geschikte blokken zijn verdeeld, dan geldt voor het produkt van A en B:

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}}$$

De **Kronecker som** ofwel **directe som** $A \oplus B$ van 2 vierkante matrices $A(m, m)$ en $B(n, n)$ wordt gedefinieerd als de vierkante matrix $C(m + n, m + n)$ waarvoor geldt:

$$\boxed{C = A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0_1 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}}$$

Hierin zijn $0_1(m, n)$ en $0_2(n, m)$ nulmatrices.
Analoge definities gelden voor de som van meerdere vierkante matrices, waarbij de Kronecker som niet-nulelementen heeft in vierkante blokken langs de hoofddiagonaal en alle andere elementen nul zijn.
Als $M = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$, dan geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \det(M) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_k) \\ \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A_1) + \mathrm{Tr}(A_2) + \cdots + \mathrm{Tr}(A_k) \\ M^{-1} = A_1^{-1} \oplus A_2^{-1} \oplus \cdots \oplus A_k^{-1} \end{array}}$$

Als A_1 en A_2 (m, m)-matrices zijn en B_1 en B_2 (n, n)-matrices, dan geldt:

$$(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 & 0 \\ 0 & B_1B_2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = (A_1A_2) \oplus (B_1B_2)}$$

Het **Kronecker produkt** ofwel **directe produkt** $A \otimes B$ van 2 matrices $A(l, m)$ en $B(p, q)$ wordt gedefinieerd als de matrix $C(lp, mq)$ waarvoor geldt:

$$\boxed{C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1}B & \cdots & a_{lm}B \end{pmatrix}}$$

Hierin is $a_{lm}B$ een blokmatrix van de orde (p, q) waarvoor geldt: $a_{lm}B = \begin{pmatrix} a_{lm}b_{11} & \cdots & a_{lm}b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{lm}b_{p1} & \cdots & a_{lm}b_{pq} \end{pmatrix}$

Voor meerdere matrices geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l}(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \\ A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C\end{array}}$$

Als $A(l,m)$, $B(p,q)$, $C(m,n)$ en $D(q,r)$ matrices zijn zo, dat AC en BD gedefinieerd zijn, dan geldt:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1}B & \cdots & a_{lm}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1n}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mn}D \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{pmatrix} (AC)_{11}BD & \cdots & (AC)_{1n}BD \\ \vdots & & \vdots \\ (AC)_{l1}BD & \cdots & (AC)_{ln}BD \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)}$$

Als A een (m,n)-matrix is, dan is $A^{[k]} = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A \mid k \in I\!N^+$ een (m^k, n^k)-matrix. Voor 2 matrices A en B waarvoor AB gedefinieerd is, geldt dan:

$$\boxed{(AB)^{[k]} = A^{[k]} B^{[k]}}$$

$$\underline{\text{Stel}}: \left.\begin{array}{l} A \text{ is een } (m,m)\text{-matrix met eigenwaarden } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ en eigenvectoren } \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \\ B \text{ is een } (n,n)\text{-matrix met eigenwaarden } \mu_1, \ldots, \mu_n \text{ en eigenvectoren } \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \mid 1 \le i \le m \\ B\vec{y}_j = \mu_j \vec{y}_j \mid 1 \le j \le n \end{array}\right. \rightarrow (A\vec{x}_i) \otimes (B\vec{y}_j) = \lambda_i \mu_j (\vec{x}_i \otimes \vec{y}_j) \rightarrow$$

$$\boxed{(A \otimes B)(\vec{x}_i \otimes \vec{y}_j) = \lambda_i \mu_j (\vec{x}_i \otimes \vec{y}_j)}$$

Hieruit volgt dat $\vec{x}_i \otimes \vec{y}_j$ een eigenvector is van $A \otimes B$ met eigenwaarde $\lambda_i \mu_j$ voor $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Differentiaalvergelijkingen

Een **gewone differentiaalvergelijking** van de eerste orde is van de vorm:

$$\boxed{y' = F(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0}$$

Als de variabelen te scheiden zijn, dan is de DV te schrijven als:

$$\boxed{A(x)dx + B(y)dy = 0}$$

Hieruit volgt voor de oplossing:

$$\boxed{\int A(x)dx + \int B(y)dy = C}$$

Een functie $F(x,y)$ is **homogeen van de graad n** als geldt:

$$\boxed{F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y) \mid n \in I\!R}$$

Hierin is λ een parameter.

Een **homogene differentiaalvergelijking van de eerste orde** is van de vorm:
$y' = F(x,y)$, met F een homogene functie van graad nul.
<u>Stel</u>: $y = zx \to z'x + z = F(x,zx) = F(1,z) \to$

$$\boxed{\frac{dz}{F(1,z) - z} = \frac{dx}{x}}$$

De algemene gewone DV van de eerste orde is van de vorm: $y' = \dfrac{F(x,y)}{G(x,y)}$

Ontwikkeling in een Taylorreeks geeft:

$$y' = \frac{a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \cdots}{b_{00} + (b_{10}x + b_{01}y) + (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + \cdots} \approx \frac{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y}{b_{00} + b_{10}x + b_{01}y}$$

<u>Stel</u>: $a_{00} = a_1 \wedge a_{10} = b_1 \wedge a_{01} = c_1 \wedge b_{00} = a_2 \wedge b_{10} = b_2 \wedge b_{01} = c_2 \to$

$$\boxed{y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}}$$

Als teller en noemer 2 snijdende lijnen zijn, dan is hun snijpunt (x_0, y_0).

<u>Stel</u>: $u = x - x_0 \wedge v = y - y_0 \mid \dfrac{dv}{du} = \dfrac{dy}{dx} \to$ homogene DV:

$$\boxed{\frac{dv}{du} = G(u,v)}$$

Als teller en noemer 2 evenwijdige lijnen zijn, dan is y' te schrijven als: $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1x + b_1y + c_2}$

Stel: $a_1x + b_1y = z \rightarrow a_1 + b_1y' = z' \rightarrow$

$$\boxed{\frac{z' - a_1}{b_1} = \frac{z + c_1}{z + c_2}}$$

Als teller en noemer 2 samenvallende lijnen zijn, dan is y' te schrijven als: $y' = \lambda \rightarrow y = \lambda x + C$

Een **exacte differentiaalvergelijking** is een DV van de vorm $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ waarbij er een functie $F(x,y)$ bestaat zo, dat: $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \ \wedge \ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ ofwel zo, dat:

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

Een DV is alleen dan exact als geldt:

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

Stel: $F(x,y) = C \mid y = f(x) \ \wedge \ C \in I\!R \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$
$F(x,y) = C$ is dus de algemene oplossing van de DV.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)dx + h(y) \rightarrow Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int P(x,y)dx\right\} + h'(y) \rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \left\{Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right\} dy}$$

Als de DV niet exact is, dan is deze d.m.v. een zgn. **integrerende factor** $\mu(x,y)$ exact te maken: $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$

Hierbij volgt $\mu(x,y)$ uit de partiële DV:

$$\boxed{\frac{\partial\{\mu(x,y)P(x,y)\}}{\partial y} = \frac{\partial\{\mu(x,y)Q(x,y)\}}{\partial x}}$$

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde** is van de vorm:

$$\boxed{y' + yP(x) = Q(x)}$$

Als $Q(x) = 0$ wordt de DV **gereduceerd**:

$$\boxed{y' + yP(x) = 0}$$

Als $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ de oplossing is van de GDV en $\phi_0(x)$ een zgn. **particuliere oplossing** van de LDV, dan is de algemene oplossing:

$$\boxed{y = Ce^{-\int P(x)dx} + \phi_0(x)}$$

De algemene oplossing volgt ook uit de **Methode van Lagrange** ofwel **Variatie van constanten**: substitutie van $C = C_0(x)$ in de gereduceerde oplossing geeft: $y = C_0(x)e^{-\int P(x)dx}$
Substitutie in de LDV geeft: $C_0'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \to C_0(x) = \displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + A \to$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + A\right\}}$$

De algemene oplossing volgt ook uit de **Methode van Bernoulli**: substitutie van $y = u(x)v(x)$ in de LDV geeft: $u'(x)v(x) + u(x)\{v'(x) + P(x)v(x)\} = Q(x)$
Stel: $v'(x) = P(x)v(x) = 0 \to v(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$
Hierbij is 1 oplossing voldoende ($C = 1$), daar de algemene oplossing bepaald kan worden door de constante die optreedt in de oplossing van $u(x)$, die volgt uit de substitutie van $v(x)$ in $u'(x)v(x) = Q(x)$: $u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \to u(x) = \displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \to$

$$\boxed{y = \left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}e^{-\int P(x)dx}}$$

De **differentiaalvergelijking van Bernoulli** is van de vorm:

$$\boxed{y' + yP(x) = y^nQ(x) \mid n \in \mathbb{R}, n \neq 0, 1}$$

Delen door y^n en substitutie van $g(x) = 1/y^{n-1} \mid g'(x) = \{(1-n)/y^n\}y'$ geeft een LDV: $(1-n)^{-1}g'(x) + g(x)P(x) = Q(x)$

De **differentiaalvergelijking van Clairaut** is van de vorm:

$$\boxed{y' = xy' + f(y')}$$

Stel: $y' = p \to y = xp + f(p) \to y' = p + xp' + f'(p)p' \Leftrightarrow [x + f'(p)]p' = 0 \to p' = 0 \vee x + f'(p) = 0 \to$
$p' = 0 \to p = a \to y = ax + b$; substitutie in de DV geeft $b = f(a) \to y = ax + f(a)$
Eliminatie van p uit het stelsel $y = xp + f(p)$ en $x + f'(p) = 0$ geeft $F(x, y) = 0$ die een oplossing kàn zijn. Deze oplossing volgt niet uit het toekennen van een bepaalde waarde aan de constanten in $y = ax + f(a)$. Een dergelijke oplossing heet een **singuliere oplossing**.

De **lineaire differentiaalvergelijking van de n-de orde** is van de vorm:

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)}$$

De **differentiaaloperator** D wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{D^n \cdot f(x) = f^{(n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}}$$

Stel: $L = a_n(x)D^n + \cdots + a_0(x)D^0 \to$

$$\boxed{L \cdot y = b(x)}$$

De functies $f_1(x), \dots, f_n(x)$ zijn **lineair afhankelijk** als er getallen $c_1, \dots, c_n \in I\!R$ zijn (niet alle nul) zo, dat $c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$.
Als de functies $(n-1)$ maal differentieerbaar zijn, dan is een noodzakelijke voorwaarde voor lineaire afhankelijkheid dan de **Wronskiaan** W van het stelsel

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad \text{nul is: } W = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Een **homogene lineaire differentiaalvergelijking** met constante coëfficienten is van de vorm:

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

Substitutie van $y = e^{\alpha x}$ geeft: $(a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) e^{\alpha x} = 0 \to$
Karakteristieke vergelijking: $a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$
I. De KV heeft n verschillende reële wortels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \to$

$$\boxed{y = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\alpha_k x}}$$

II. De KV heeft n verschillende wortels, waaronder complexe $a + bi \to a - bi$ is ook een wortel, daar $a_n \in I\!R \to$
$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \wedge y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \to$
$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax} \cos bx \wedge (2i)^{-1}(y_1 - y_2) = e^{ax} \sin bx$ zijn oplossingen.

III. De KV heeft meervoudige wortels $\to$ aantal verschillende wortels m is kleiner dan n.
Als α_0 een k-voudige wortel is van de KV $P(\alpha) = 0$, dan geldt tevens:
$P'(\alpha_0) = 0 \wedge P''(\alpha_0) = 0 \wedge \dots \wedge P^{(k-1)}(\alpha_0) = 0$

$$L \cdot e^{\alpha x} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i e^{\alpha x} = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i e^{\alpha x} = e^{\alpha x} P(\alpha) \to \frac{\partial}{\partial \alpha} L \cdot e^{\alpha x} = x e^{\alpha x} P(\alpha) + e^{\alpha x} P'(\alpha) = L \cdot x e^{\alpha x}$$

Als α_0 een tweevoudige wortel is, dan geldt: $P(\alpha_0) = 0 \wedge P'(\alpha_0) = 0 \to$
$L \cdot x e^{\alpha_0 x} = 0 \to x e^{\alpha_0 x}$ is - naast $e^{\alpha_0 x}$ - een oplossing.

Algemeen geldt: als α_0 een k-voudige wortel is, dan zijn $e^{\alpha_0 x}, x e^{\alpha_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha_0 x}$ oplossingen.
Dit geldt ook als $\alpha_0 = a + bi$ een k-voudige wortel is:
$x^j e^{\alpha_0 x} \cos bx \wedge x^j e^{\alpha_0 x} \sin bx \mid j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ zijn oplossingen.

De **differentiaalvergelijking van Euler** is een homogene DV van de vorm:

$$\boxed{A_n (a + bx)^n y^{(n)} + A_{n-1}(a + bx)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1 (a + bx) y' + A_0 y = 0}$$

Substitutie van $a + bx = \sigma e^u \mid a + bx > 0 \Rightarrow \sigma = 1 \wedge a + bx < 0 \Rightarrow \sigma = -1$ geeft een homogene LDV met constante coëfficiënten.

De LDV $L \cdot y = b(x)$ is op te lossen d.m.v. de methode van variatie van constanten:

Stel: $y = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(x)$ is de algemene oplossing van $L \cdot y =$ en $c_k = C_k(x) \to$

$y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) f_k(x) \to y' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) f_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) f_k'(x)$

Stel: $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x)f_k(x) = 0 \rightarrow y'' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x)f_k'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x)f_k''(x)$

Stel: $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x)f_k'(x) = 0 \rightarrow y''' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x)f_k''(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x)f_k'''(x) \ldots\ldots \rightarrow$

$y^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x)f_k^{(n-1)}(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x)f_k^{(n)}(x)$

Substitutie van $y^{(j)} \mid j = 0, 1, 2, \ldots, n$ in $L \cdot y = b(x)$ geeft: $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x)f_k^{(n-1)}(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$

De functies $C_k'(x)$ volgen uit het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} C_1'(x)f_1(x) + \cdots + C_n'(x)f_n(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)f_n^{(n-1)}(x) = b(x)/a_n(x) \end{cases}$$

Integratie van de $C_k'(x)$'s geeft na substitutie in y een particuliere oplossing $\phi_0(x) \rightarrow$ algemene oplossing: $y + \phi_0(x)$

De **differentiaalvergelijking van Bessel** is van de vorm:

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \mid n \geq 0}$$

Substitutie van $y = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k x^{k+\beta} \mid k < 0 \Rightarrow c_k = 0$ geeft:

$\sum\limits_{-\infty}^{\infty} [(k+\beta)(k+\beta-1)c_k + (k+\beta)c_k + c_{k-2} - n^2c_k]x^{k+\beta} = 0 \rightarrow [(k+\beta)^2 - n^2]c_kc_{k-2} = 0$

$k = 0 \Rightarrow c_{-2} = 0 \rightarrow$ **indexvergelijking**: $(\beta^2 - n^2)c_0 = 0 \rightarrow c_0 \neq 0 \rightarrow \beta^2 = n^2 \rightarrow \underline{e}ta = \pm n$

$\beta = n \Rightarrow k(2n+k)c_k + c_{k-2} = 0$; substitutie van achtereenvolgens $k = 1, 2, 3, \ldots$ geeft:

$c_1 = 0,\ c_2 = \dfrac{-c_0}{2(2n+2)},\ c_3 = 0,\ c_4 = \dfrac{-c_2}{4(2n+4)} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} \rightarrow$

$y = c_0x^n + x_2x^{n+2} + c_4x^{n+4} + \cdots = c_0x^n \left[1 - \dfrac{x^2}{2(2n+2)} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right]$

$\beta = -n \Rightarrow c_0x^n \left[1 - \dfrac{x^2}{2(2-2n)} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right] \rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} y =& Cx^n \left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} + \\ & Dx^{-n} \left\{1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right\} \Bigg| \ n \notin I\!N \end{aligned}}$$

De **Besselfunctie van de eerste soort en orde $\boldsymbol{n}$** $J_n(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)} \left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)}}$$

Hieruit volgt voor $n = 0$:

$$\boxed{J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots}$$

De algemene oplossing van de Besselvergelijking is nu te schrijven als:

$$\boxed{y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \mid n \notin I\!N}$$

Hierin is $J_{-n}(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\frac{1}{2}x)^{-n+2r}}{r!\Gamma(-n+r+1)}$

Voor $n \in I\!N$ zijn $J_n(x)$ en $J_{-n}(x)$ lineair afhankelijk, daar geldt dan:

$$\boxed{J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)}$$

Voor de polynomen $J_n(x)$ gelden de volgende recursieformules:

$$\boxed{\begin{array}{l}
J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x) \\
J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \\
xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\
D_x[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \\
D_x[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{+1}(x)
\end{array}}$$

Substitutie van $J_n(x)$ resp. $J_{-n}(x)$ in de DV van Bessel, vermenigvuldiging van de 1-ste met $J_{-n}(x)$ en de 2-de met $J_n(x)$ en aftrekking geeft:
$x^2[J_n''(x)J_{-n}(x) - J_{-n}''(x)J_n(x)] + x[J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x)] = 0 \Leftrightarrow$
$D_x[x\{J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x)\}] = 0 \to J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x) = c/x$

Substitutie van $J_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)} - \cdots$, $J_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{2^n\Gamma(n)} - \cdots$,

$J_{-n}(x) = \dfrac{x^{-n}}{2^n\Gamma(-n+1)} - \cdots$ en $J_{-n}'(x) = \dfrac{x^{-n-1}}{2^n\Gamma(-n)} - \cdots$ geeft:

$c = c = \dfrac{2}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)} = \dfrac{2\sin n\pi}{\pi} \to$

$$\boxed{J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}}$$

De **voortbrengende functie** voor Besselfuncties wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n}$$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(x/2)^{\frac{1}{2}+2r}}{r!\Gamma(r+\frac{3}{2})} = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} - \cdots$$

$J_{1/2}(x) = \dfrac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}}\left\{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \cdots\right\} = \dfrac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$; analoog voor $J_{-1/2}(x) \rightarrow$

$$\boxed{J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \wedge \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x}$$

Substitutie van $n = \frac{1}{2}$ resp. $n = -\frac{1}{2}$ in $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = (2n/x)J_n(x)$ geeft:

$$\boxed{J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right) \quad \wedge \quad J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right)}$$

Stel: $t = e^{\theta i} \rightarrow e^{\frac{1}{2}x(e^{\theta i} - e^{-\theta i})} = e^{ix\sin x} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{n\theta i} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)[\cos n\theta + i\sin n\theta] \Leftrightarrow$

$e^{ix\sin x} = [J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + \cdots] + i[2J_1(x)\sin\theta + 2J_3(x)\sin 3\theta + \cdots] \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots \\ \sin(x\sin\theta) = 2J_1(x)\sin\theta + 2J_3(x)\sin 3\theta + 2J_5(x)\sin 5\theta + \cdots\end{array}}$$

$\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta = J_0(x)\int\limits_0^\pi \cos n\theta d\theta + 2J_2(x)\int\limits_0^\pi \cos 2\theta\cos n\theta d\theta + \cdots | n = 0, 2, 4, \ldots \Leftrightarrow$

$\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta = J_2(x)\pi + J_4(x)\pi + \cdots = \pi J_n(x)$

$\int\limits_0^\pi \sin(x\sin\theta)\sin n\theta d\theta = 2J_1(x)\int\limits_0^\pi \sin\theta\sin n\theta d\theta + 2J_3(x)\int\limits_0^\pi \sin 3\theta\sin n\theta d\theta + \cdots = 0 | n = 0, 2, 4, \ldots \rightarrow$

$J_n(x) = (\pi)^{-1}\int\limits_0^\pi [\cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta]d\theta = (\pi)^{-1}\int\limits_0^\pi \cos(b\theta - x\sin\theta)d\theta$

Analoog geldt voor $n = 1, 3, 5, \ldots$:

$J_n(x) = (\pi)^{-1}\int\limits_0^\pi \sin(x\sin\theta)\sin n\theta d\theta$ en $\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta = 0 \rightarrow$

$$\boxed{J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta \;\Bigg|\; n \in I\!N}$$

De **Besselfunctie van de tweede soort en orde n** ofwel **Neumannfunctie** $Y_n(x)$ wordt gedefinieerd als:

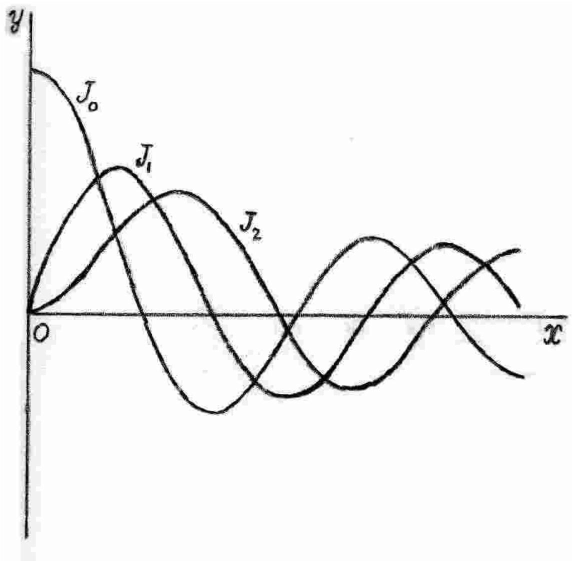
$$\boxed{Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \;\Bigg|\; n \notin I\!N}$$

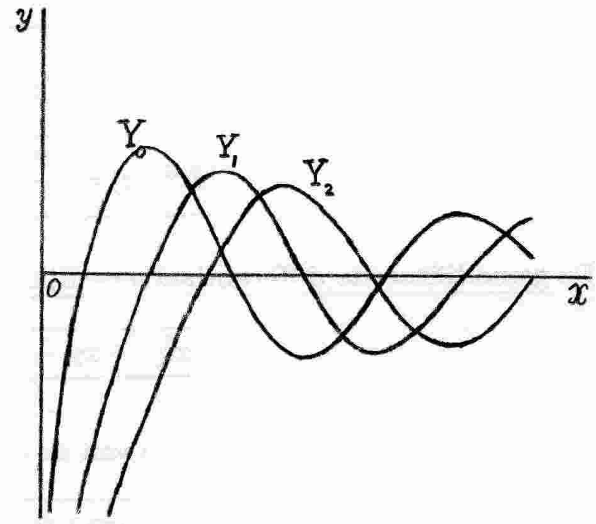
Voor $n \in I\!N$ wordt $Y_n(x)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{Y_n(x) = \lim_{p\rightarrow n}\frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \;\Bigg|\; n \in I\!N}$$

De algemene oplossing van de DV van Bessel is nu te schrijven als:

$$\boxed{y = c_1J_n(x) + c_2Y_n(x)}$$





Voor $n \in I\!N$ is $Y_n(x)$ in een reeks te ontwikkelen:

$$\boxed{Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln \tfrac{1}{2}x + \gamma\}J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\tfrac{1}{2}x^{2k-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{\Phi(k) + \Phi(n+k)\}\frac{\frac{1}{2}x^{2k+n}}{k!(n+k)!}}$$

Hierin is $\gamma \approx 0,58$ de **constante van Euler** en is $\Phi(p) = 1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + p^{-1} \mid \Phi(0) = 0$.
Voor $n = 0$ geldt voor $Y_0(x)$:

$$\boxed{Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln \tfrac{1}{2}x + \gamma\}J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}(1 + 2^{-1}) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}(1 + 2^{-1} + 3^{-1}) - \cdots\right]}$$

De **Hankelfunctie van de eerste soort** $H_n^{(1)}(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)}$$

De **Hankelfunctie van de tweede soort** $H_n^{(2)}(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)}$$

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\left[\frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\right] = \frac{J_n(x)\sin n\pi + iJ_n(x)\cos n\pi - iJ_{-n}(x)}{\sin n\pi} \Leftrightarrow$$

$$H_n^{(1)}(x) = i\left[\frac{J_n(x)\{\cos n\pi - i\sin n\pi\} - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\right] = i\left[\frac{J_n(x)e^{-n\pi i} - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\right] \rightarrow$$

$$\boxed{H_n^{(1)}(x) = \frac{J_{-n}(x) - e^{-n\pi i}J_n(x)}{i\sin n\pi}}$$

Substitutie van $-i$ voor i geeft voor $H_n^{(2)}(x)$:

$$\boxed{H_n^{(2)}(x) = \frac{e^{n\pi i}J_n(x) - J_{-n}(x)}{i\sin n\pi}}$$

De **gemodificeerde differentiaalvergelijking van Bessel** is van de vorm:

$$\boxed{x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0}$$

De **gemodificeerde Besselfunctie van de eerste soort en orde *n*** $I_n(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = e^{-\frac{1}{2}n\pi i}J_n(ix)}$$

Als n een geheel getal is, dan geldt:

$$\boxed{I_{-n}(x) = I_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}}$$

De **gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort en orde *n*** $K_n(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{K_n(x) = \tfrac{1}{2}\pi\left[\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}\right] \Bigg| \; n \notin \mathbb{N}}$$

Voor $n \in \mathbb{N}$ wordt $K_n(x)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{K_n(x) = \tfrac{1}{2}\pi \lim_{p\to n}\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi} \Bigg| \; n \in \mathbb{N}}$$

De algemene oplossing van de gemodificeerde DV van Bessel is dan:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \mid n \notin \mathbb{N} \\ y = CI_n(x) + DK_n(x) \mid n \in \mathbb{N} \end{array}}$$

De **complexe differentiaalvergelijking van Bessel** is van de vorm:

$$\boxed{x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)y = 0}$$

De **Ber- en Beifuncties** $\mathrm{Ber}_n(x)$ en $\mathrm{Bei}_n(x)$ worden gedefinieerd als het reële en imaginaire deel van $J_n(i^{3/2}x)$:

$$\boxed{J_n(i^{3/2}x) = \mathrm{Ber}_n(x) + i\,\mathrm{Bei}_n(x)}$$

De **Ker- en Keifuncties** $\mathrm{Ber}_n(x)$ en $\mathrm{Kei}_n(x)$ worden gedefinieerd als het reële en imaginaire deel van $e^{-\frac{1}{2}n\pi i}K_n(i^{1/2}x)$:

$$\boxed{e^{-\frac{1}{2}n\pi i}K_n(i^{1/2}x) = \mathrm{Ber}_n(x) + i\,\mathrm{Kei}_n(x)}$$

De algemene oplossing van de complexe DV van Bessel is dan:

$$\boxed{y = EJ_n(i^{3/2}x) + FK_n(i^{1/2}x)}$$

Voor grote waarden van x zijn $J_n(x)$ en $Y_n(x)$ te schrijven in asymptotische vorm:

$$\boxed{\begin{aligned} J_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}n\pi) \\ Y_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}n\pi) \end{aligned}}$$

Substitutie van $\lambda x|\ \lambda \in I\!R$ in de DV van Bessel geeft:

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0}$$

De algemene oplossing van deze DV is dan:

$$\boxed{y = GJ_n(\lambda x) + HY_n(\lambda x)}$$

Als $y_1 = J_n(\lambda x)$ en $y_2 = J_n(\mu x)$ oplossingen zijn, dan geldt:
$x^2y_1'' + xy_1' + (\lambda^2x^2 - n^2)y_1 = 0$ en $x^2y_2'' + xy_2' + (\mu^2x^2 - n^2)y_2 = 0$
Vermenigvuldiging van de 1-ste DV met y_2 en van de 2-de DV met y_1 en aftrekking geeft:

$x^2(y_2y_1'' - y_1y_2'') + x(y_2u_1' - y_1y_2') = (\mu^2 - \lambda^2)x^2y_1y_2 \Leftrightarrow$

$D_x[x(y_2y_1' - y_1y_2')] = (\mu^2 - \lambda^2)xy_1y_2 \to (\mu^2 - \lambda^2)\int xy_1y_2dx = x(y_2y_1' - y_1y_2') + C \to$

$\mu^2\lambda^2 \neq 0 \Rightarrow \displaystyle\int xJ_n(\lambda x)j_n(\mu x)dx = \frac{x[\lambda J_n(\mu x)J_n'(\lambda x) - \mu J_n(\lambda x)J_n'(\mu x)]}{\mu^2 - \lambda^2} + C \to$

$$\boxed{\int_0^1 J_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = \frac{\lambda J_n(\mu)J_n'(\lambda) - \mu J_n(\lambda)J_n'(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2} \;\Bigg|\; \lambda \neq \mu}$$

$\mu = \lambda \Rightarrow \int_0^1 xJ_n^2(\lambda x)dx = \displaystyle\lim_{\mu\to\lambda} \frac{\lambda J_n'(\mu)J_n'(\lambda) - J_n(\lambda)J_n'(\mu) - \mu J_n(\lambda)J_n''(\mu)}{2\mu} \Leftrightarrow$

$\int_0^1 xJ_n^2(\lambda x)dx = \dfrac{\lambda J_n'^2(\lambda) - J_n(\lambda)J_n'(\lambda) - \lambda J_n(\lambda)J_n''(\lambda)}{2\lambda}$

Substitutie van $J_n''(\lambda)$ uit $\lambda^2J_n''(\lambda) + \lambda J_n'(\lambda) + (\lambda^2 - n^2)J_n(\lambda) = 0$ geeft:

$$\boxed{\int_0^1 xJ_n^2(\lambda x)dx = \tfrac{1}{2}\left[J_n'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right)J_n^2(\lambda)\right]}$$

<u>Stel</u>: μ en λ zijn 2 verschillende wortels van $PJ_n(x) + QxJ_n'(x) = 0 \mid P, Q \in I\!R \to$
$PJ_n(\lambda) + QJ_n'(\lambda) = 0$ en $PJ_n(\mu) + QJ_n'(\mu) = 0$
Vermenigvuldiging van de 1-ste vergelijking met $J_n(\mu)$ en van de 2-de met $J_n(\lambda)$ en aftrekking geeft: $\lambda J_n'(\lambda)J_n(\mu) - \mu J_n'(\mu)J_n(\lambda) = 0 \to$

$$\boxed{\int_0^1 xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = 0}$$

Dit betekent dat de functies $\sqrt{x}J_n(\lambda x)$ en $\sqrt{x}J_n(\mu x)$ orthogonaal in het punt $(0,1)$ zijn, ofwel dat $J_n(\lambda x)$ en $J_n(\mu x)$ orthogonaal zijn m.b.t. de dichtheidsfunctie x.

Als $f(x)$ aan de Dirichletvoorwaarden voldoet, dan kan $f(x)$ in elk punt van het interval $0 < x < 1$ als een Besselreeks geschreven worden:

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x) \mid 0 < x < 1}$$

Hierin zijn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ de pos. wortels van $PJ_n(x) + QxJ_n'(x) = 0 \mid Q \neq 0$

$\int\limits_0^1 xJ_n(\lambda_k x)f(x)dx = \sum\limits_{p=1}^{\infty} A_p \int\limits_0^1 xJ_n(\lambda_k x)J_n(\lambda_p x)dx = A_k \int\limits_0^1 xJ_n^2(\lambda_k x)dx \Leftrightarrow$

$\int\limits_0^1 xJ_n(\lambda_k x)f(x)dx = \frac{1}{2}A_k \int\limits_0^1 \left[J_n'(\lambda_k) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^2}\right) J_n^2(\lambda_k) \right]$

$PJ_n(\lambda_k) + Q\lambda_k J_n'(\lambda_k) = 0 \to J_n'(\lambda_k) = R^2 J_n^2(\lambda_k)/S^2\lambda_k^2 \to$

$\int\limits_0^1 xJ_n(\lambda_k x)f(x)dx = \dfrac{A_k}{2\lambda_k^2} \left[\left\{ \dfrac{R^2}{S^2} + \lambda_k^2 - n^2 \right\} J_n^2(\lambda_k) \right] \to$

$$A_k = \frac{2\lambda_k^2}{[\lambda_k^2 - n^2 + (R^2/S^2)]J_n^2(\lambda_k)} \int_0^1 xJ_n(\lambda_k x)f(x)dx \to$$

$$\boxed{f(x) = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p^2 J_n(\lambda_p x)}{[\lambda_p^2 - n^2 + (R^2/S^2)]J_n^2(\lambda_p)} \int_0^1 xJ_n(\lambda_p x)f(x)dx}$$

$Q = 0 \Rightarrow J_n(\lambda_p) = 0 \to \int\limits_0^1 xJ_n(\lambda_k x)f(x)dx = \frac{1}{2}A_k J_n'(\lambda_k) = \frac{1}{2}A_k J_{n+1}^2(\lambda_k) \to$

$$\boxed{f(x) = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_p x)}{J_{n+1}^2(\lambda_p)} \int_0^1 xJ_n(\lambda_p x)f(x)dx}$$

De **differentiaalvergelijking van Legendre** is van de vorm:

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0}$$

Substitutie van $y = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^{k+\beta} \mid k < 0 \Rightarrow c_k = 0$ geeft:

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} [(k+\beta+2)(k+\beta+1)c_{k+2} - (k+\beta)(k+\beta-1)c_k - 2(k+\beta)c_k + n(n+1)c_k]x^{k+\beta} = 0 \to$

$(k+\beta+2)(k+\beta+1)c_{k+2} + [n(n+1) - (k+\beta)(k+\beta+1)]c_k = 0$

Stel: $k = -2 \to c_{-2} = 0 \land \beta(\beta-1)c_0 = 0 \to \beta = 0 \lor \beta = 1$

$\beta = 0 \Rightarrow (k+2)(k+1)c_{k+2} + [n(n+1) - k(k+1)]c_k = 0$; substitutie van achtereenvolgens $k = -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ geeft:

$c_2 = -\dfrac{n(n+1)}{2 \cdot 1}$, $c_3 = \dfrac{1 \cdot 2 - n(n+1)}{3 \cdot 2} c_1$, $c_4 = \dfrac{[2 \cdot 3 - n(n+1)]}{4 \cdot 3} c_2, \ldots \rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} y = \quad & c_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots\right] + \\ & c_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots\right] \end{aligned}}$$

Daar er 2 willekeurige constanten in de oplossing staan is het geval $\beta = 1$ irrelevant.
Daar er voor $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ de 1-ste reeks een polynoom geeft en voor $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ de 2-de reeks, bezit de DV dus polynoom oplossingen.

Voor $k = n$ volgt uit $(k+2)(k+1)c_{k+2} + [n(n+1) - k(k+1)]c_k = 0$ dat $c_{n+2} = 0 \rightarrow c_{n+4} = c_{n+6} = \cdots = 0$, terwijl voor achtereenvolgens $k = n-2, n-4, \ldots$ volgt:

$c_{n-2} = -\dfrac{n(n-1)}{2(2n-1)} c_n$, $c_{n-4} = -\dfrac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} c_{n-2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} c_n, \ldots \rightarrow$

$$y = c_n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right]$$

<u>Stel</u>: $c_n = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n!} \rightarrow$

Legendre polynomen $P_n(x)$:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right]}$$

Voor alle $n \in I\!N$ geldt:

$$\boxed{P_n(1) = 1 \quad \wedge \quad P_n(-1) = (-1)^n}$$

Voor de 1-ste 6 Legendre polynomen geldt:

$$\boxed{\begin{aligned} & P_0(x) = 1 \\ & P_1(x) = 1 \\ & P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ & P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ & P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ & P_5(x) = \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x P_n(x)dx \cdots dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2n)!} \left[x^{2n} - nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{2n-4} - \cdots\right] \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x P_n(x)dx \cdots dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 2 \cdot 1}(x^2-1)^n = \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} \rightarrow$$

Formule van Rodrigues:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$$

De voortbrengende functie voor de Legendre polynomen wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n}$$

Voor de polynomen $P_n(x)$ gelden de volgende recursieformules:

$$\boxed{\begin{array}{l}
[n+1]P_{n+1}(x) = [2n+1]xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\\
P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = [2n+1]P_n(x)\\
P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = [n+1]P_n(x)\\
xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)
\end{array}}$$

Afhankelijk van $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ of $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ is één van de reeksen in de serie oplossing van de DV van Legendre nul. Hieruit volgen voor $|x| < 1$ de **Legendre functies van de tweede soort** $Q_n(x)$:

$$\boxed{\begin{array}{rl}
Q_n(x) = & \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}n}2^n\{(n/2)!\}^2}{n!}\left[x - \dfrac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \right.\\
& \left.\dfrac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots\right] \Bigg| \; n = 0, 2, 4, \ldots\\[2ex]
Q_n(x) = & \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}2^{n-1}\{((n-1)/2)!\}^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots n}\left[1 - \dfrac{n(n+1)}{2!}x^2 + \right.\\
& \left.\dfrac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots\right] \Bigg| \; n = 1, 3, 5, \ldots
\end{array}}$$

Voor de 1-ste 3 Legendre functies van de 2-de soort geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l}
Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\\
Q_1(x) = -1 + \frac{1}{2}x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\\
Q_2(x) = -1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\dfrac{1+x}{1-x}
\end{array}}$$

De algemene oplossing van de DV van Legendre is nu te schrijven als:

$$\boxed{y = c_1P_n(x) + c_2Q_n(x) \mid n \in I\!N}$$

Als $P_m(x)$ en $P_n(x)$ oplossingen zijn, dan geldt:

$(1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$ en
$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$

Vermenigvuldiging van de 1-ste DV met $P_n(x)$ en van de 2-de DV met $P_m(x)$ en aftrekking geeft:

$(1-x^2)[P''_m(x)P_n(x) - P''_n(x)P_m(x)] - 2x[P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x)] =$

$[n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n(x) \Leftrightarrow$

$D_x[(1-x^2)\{P_n(x)P'_m(x) - P_m(x)P'_n(x)\}] = [n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n(x) \rightarrow$

$[n(n+1) - m(m+1)] \int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = [(1-x^2)\{P_n(x)P'_m(x) - P_m(x)P'_n(x)\}]_{-1}^{1} = 0 \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \Bigg| \quad m \neq n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \Leftrightarrow \frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)t^{m+n} \rightarrow$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^{m+n} \int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx \rightarrow$$

$$\frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx \rightarrow$$

$$\boxed{\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}}$$

Als $f(x)$ aan de Dirichletvoorwaarden voldoet, dan kan $f(x)$ in elk punt van het interval $-1 < x < 1$ als een Legendrereeks geschreven worden:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x) \mid -1 < x < 1}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)dx = A_m \int\limits_{-1}^{1} P_m^2(x)dx = \frac{2A_m}{2m+1} \rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)P_k(x)\int\limits_{-1}^{1} P_k(x)f(x)dx}$$

De **Geassocieerde differentiaalvergelijking van Legendre** is van de vorm:

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2ny' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0}$$

De **Geassocieerde Legendre functie van de eerste soort** $P_n^m(x)$ wordt gedefunieerd als:

$$\boxed{P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)}$$

De **Geassocieerde Legendre functie van de tweede soort** $Q_n^m(x)$ wordt gedefunieerd als:

$$\boxed{P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)}$$

De algemene oplossing van de geassocieerde DV is voor $m, n \in I\!N$ nu te schrijven als:

$$\boxed{y = c_3 P_n^m(x) + c_4 Q_n^m(x)}$$

Analoog aan de Legendre polynomen geldt:

$$\boxed{\int\limits_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0 \quad \Big| \quad n \neq k}$$

Voor $n = k$ geldt:

$$\boxed{\int\limits_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}$$

In het interval $-1 < x < 1$ is $f(x)$ te schrijven als:

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\frac{(k-m)!}{(k+m)!}P_k^m(x)\int\limits_{-1}^{1} P_k^m(x) f(x) dx}$$

De **differentiaalvergelijking van Hermite** is van de vorm:

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2ny = 0}$$

De oplossingen van deze DV worden gegeven door de **Hermite polynomen** $H_n(x)$ die volgen uit de corresponderende Formule van Rodrigues:

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})}$$

Voor de 1-ste 5 Hermite polynomen geldt:

$$\boxed{\begin{aligned} &H_0(x) = 1 \\ &H_1(x) = 2x \\ &H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ &H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ &H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}}$$

De voortbrengende functie voor Hermite polynomen wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}}$$

Voor de polynomen $H_n(x)$ gelden de volgende recursieformules:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \end{array}}$$

Als $H_m(x)$ en $H_n(x)$ oplossingen zijn, dan geldt:

$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0$ en $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$

Vermenigvuldiging van de 1-ste DV met $H_n(x)$ en van de 2-de DV met $H_m(x)$ en aftreking geeft:

$H_m''(x)H_n(x) - H_n''(x)H_m(x) - 2x[H_m'(x)H_n(x) - H_n'(x)H_m(x)] = 2[n-m]H_m(x)H_n(x) \Leftrightarrow$

$D_x[e^{-x^2}\{H_n(x)H_m'(x) - H_m(x)H_n'(x)\}] = 2(n-m)e^{-x^2}H_m(x)H_n(x) \rightarrow$

$2(n-m)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx = e^{-x^2}[\{H_n(x)H_m'(x) - H_m(x)H_n'(x)\}]_{-\infty}^{\infty} = 0 \rightarrow$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx = 0 \;\Big|\; m \neq n}$$

$e^{2tx-t^2}e^{2sx-s^2} = e^{2tx-t^2+2sx-s^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_m(x)t^n s^m}{n!m!} \rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{[(x-s-t)^2-2st]}dx = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^m t^n}{m!n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx$$

$e^{2st}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(x-s-t)^2}dx = e^{2st}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = e^{2st}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{2^m s^m t^m}{m!} \rightarrow$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}}$$

Als $f(x)$ aan de Dirichletvoorwaarden voldoet, dan kan $f(x)$ in elk punt van het interval $-\infty < x < \infty$ als een Hermitereeks geschreven worden:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)}$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_k(x)dx = A_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m^2(x)dx = 2^m m!\sqrt{\pi}A_m \rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)}{2^k k!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_k(x)f(x)dx}$$

De **differentiaalvergelijking van Laguerre** is van de vorm:

$$\boxed{xy'' + (1-x)y' + ny = 0}$$

De oplossingen van deze DV worden gegeven door de Laguerre polynomen $L_n(x)$ die volgen uit de corresponderende Formule van Rodrigues:

$$\boxed{L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})}$$

Voor de 1-ste 5 Laguerre polynomen geldt:

$$\boxed{\begin{aligned} &L_0(x) = 1 \\ &L_1(x) = 1 - x \\ &L_2(x) = 2 - 4x + x^2 \\ &L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3 \\ &L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4 \end{aligned}}$$

De voortbrengende functie voor Laguerre polynomen wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}}$$

Voor de polynomen $L_n(x)$ gelden de volgende recursieformules:

$$\boxed{\begin{aligned} &L_{n+1}(x) = [2n+1-x]L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \\ &nL_{n-1}(x) = nL'_{n-1}(x) - L'_n(x) \end{aligned}}$$

Als $L_m(x)$ en $L_n(x)$ oplossingen zijn, dan geldt:

$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0$ en $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$

Vermenigvuldiging van de 1-ste DV met $L_n(x)$ en van de 2-de DV met $L_m(x)$ en aftreking geeft:

$x[L''_m(x)L_n(x) - L''_n(x)L_m(x)] + (1-x)[L'_m(x)L_n(x) - L'_n(x)L_m(x)] = [n-m]L_m(x)L_n(x) \Leftrightarrow$

$D_x[xe^{-x}\{L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\}] = [n-m]e^{-x}L_m(x)L_n(x) \rightarrow$

$(n-m)\int\limits_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = xe^{-x}[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)]_0^\infty = 0 \rightarrow$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = 0 \quad \Big| \quad m \neq n}$$

$\int\limits_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n(x)e^x D_x^n(e^{-x}x^n)dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n(x)D_x^n(e^{-x}x^n)dx \Leftrightarrow$

$\int\limits_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)dx = n! \int\limits_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!\Gamma(n+1) \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)dx = (n!)^2}$$

Als $f(x)$ aan de Dirichletvoorwaarden voldoet, dan kan $f(x)$ in elk punt van het interval $[0;\infty>$ als een Laguerrereeks geschreven worden:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^\infty A_k L_k(x)}$$

$\int\limits_0^\infty e^{-x} L_m(x) f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^\infty A_k \int\limits_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_k(x) dx = A_m \int\limits_0^\infty e^{-x} L_m^2(x)dx = (m!)A_m \rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{L_k(x)}{(k!)^2} \int\limits_0^\infty e^{-x} L_k(x) f(x) dx}$$

De **<u>differentiaalvergelijking van Airy</u>** is van de vorm:

$$\boxed{y'' - xy = 0}$$

Substitutie van $y = \sum\limits_{n=0}^\infty c_n x^n$ geeft: $\sum\limits_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^{n+1} = 0 \Leftrightarrow$

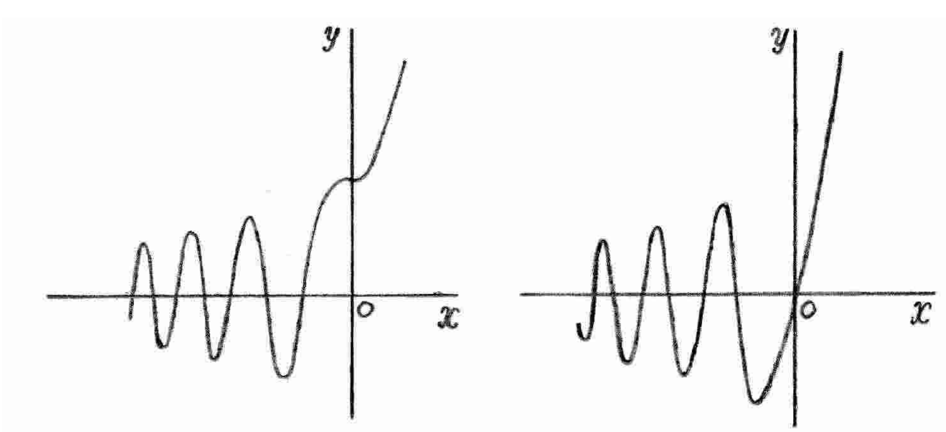
$\sum\limits_{n=0}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum\limits_{n=1}^\infty a_{n-1}x^n = 0 \Leftrightarrow$

$2a_2 + \sum\limits_{n=1}^\infty [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0 \rightarrow a_2 = 0 \wedge a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \Bigg| \; n \in I\!N^+ \rightarrow$

Substitutie van achtereenvolgens $n = 1, 2, 3, \ldots$ geeft:

$a_3 = \dfrac{a_0}{3 \cdot 2}$, $a4 = \dfrac{a_1}{4 \cdot 3}$, $a_5 = \dfrac{a_2}{5 \cdot 4}$, $a_6 = \dfrac{a_3}{6 \cdot 5}$, $a_7 = \dfrac{a_4}{7 \cdot 6} = \dfrac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \ldots \rightarrow$

$$\boxed{y = a_0 \left\{ 1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots \right\} + a_1 \left\{ x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots \right\}}$$

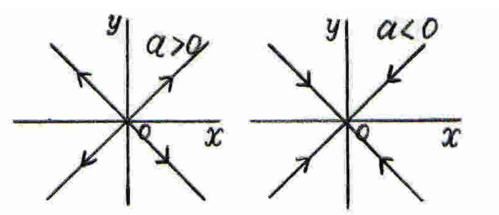


Een **Sturm-Liouville stelsel** is een grenswaarde probleem van de vorm:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \,\Big|\; a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \quad \wedge \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}}$$

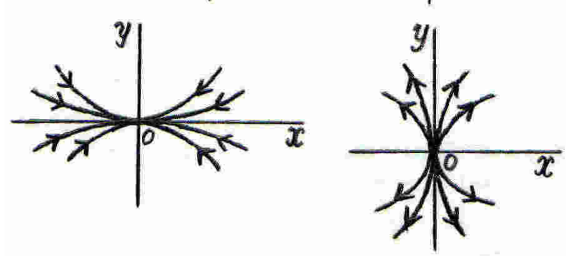
Hierin zijn a_1, a_2, b_1 en b_2 constanten, is λ een parameter onafhankelijk van x en is $r(x)$ een gewichtsfunctie die i.h.a. pos. is. Het stelsel heeft alleen oplossingen voor een aantal bepaalde waarden van λ, de zgn. eigenwaarden van het stelsel. De corresponderende oplossingen heten de eigenfuncties van het stelsel, waarbij bij elke eigenwaarde 1 eigenfunctie hoort. Als $p(x)$ en $q(x)$ reële functies zijn, dan zijn de eigenwaarden ook reëel. Tevens vormen de eigenfuncties een orthogonale verz. m.b.t. $r(x)$.

Stelsels homogene LDV-en met reële coëfficiënten zijn van de vorm:



I. $\begin{cases} \dot{x}(y) = ax(t) \\ \dot{y}(t) = ay(t) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} x(t) = Ae^{at} \\ y(t) = Be^{at} \end{matrix}\right\} \rightarrow$

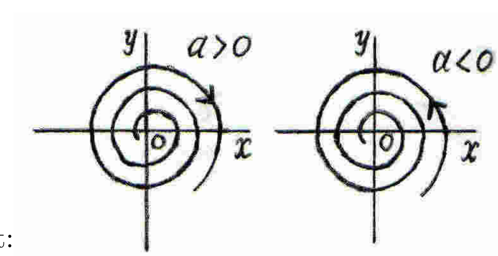
$$\vec{v}(t) = A\begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix} \;\wedge\; Bx = Ay$$



II. $\begin{cases} \dot{x}(y) = ax(t) \\ \dot{y}(t) = by(t) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} x(t) = Ae^{at} \\ y(t) = Be^{bt} \end{matrix}\right\} \rightarrow$

$$\vec{v}(t) = A\begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ e^{bt} \end{pmatrix} \;\wedge\; Cy^a = Dx^b$$

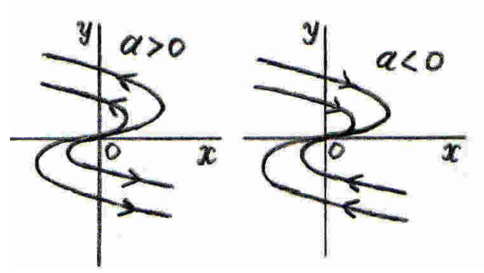
III. $\begin{cases} \dot{x}(y) = ax(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = ay(t) \end{cases}$



<u>Stel</u>: $\left.\begin{matrix} x(t) = Ae^{\alpha t} \\ y(t) = Be^{\alpha t} \end{matrix}\right\}$; substitutie in $\dot{x}(t)$ en $\dot{y}(t)$ geeft:

$$\alpha = a \text{ en } B = 0 \rightarrow \vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} Ae^{\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Stel</u>: $\left.\begin{matrix} x(t) = (p + qt)e^{at} \\ y(t) = (r + st)e^{at} \end{matrix}\right\}$; substitutie in $\dot{x}(t)$ en $\dot{y}(t)$ geeft:



$$s = p = 0 \text{ en } q = r = 1 \rightarrow \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{at} \\ e^{at} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\vec{v}(t) = A\begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} te^{at} \\ e^{at} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad x = \frac{A}{B}y + \frac{1}{a}y \ln\left|\frac{y}{B}\right|$$

IV. $\begin{cases} \dot{x}(y) = ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = -bx(t) + ay(t) \end{cases}$

<u>Stel</u>: $\left.\begin{matrix} x(t) = Ae^{\alpha t} \\ y(t) = Be^{\alpha t} \end{matrix}\right\}$; substitutie in $\dot{x}(t)$ en $\dot{y}(t)$ geeft

2 complexe wortels α_1 en $\alpha_2 \rightarrow \{\vec{v}_1^* + \vec{v}_2^*\}/2$ en $\{\vec{v}_1^* - \vec{v}_2^*\}/2i$ zijn oplossingen $\rightarrow$

$$\vec{v}(t) = A\begin{pmatrix} e^{at}\sin bt \\ e^{at}\cos bt \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} e^{at}\cos bt \\ -e^{at}\sin bt \end{pmatrix} \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = (A^2 + B^2)e^{2at}$$

De **Laplacegetransformeerde** F van f wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

Uit de definitie volgt:

$$\boxed{\mathcal{L}\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}}$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(s/a)u}f(u)du \rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}$$

<u>Stel</u>: $\left.\begin{array}{ll} g(t) = f(t-a) & \mid t > a \wedge a > 0 \\ g(t) = 0 & \mid 0 \le t \le a \end{array}\right\} \rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(a+u)}f(u)du \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)dt \rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{A\to\infty,\delta\downarrow 0}\int_\delta^A e^{-st}f'(t)dt = \lim_{A\to\infty,\delta\downarrow 0}[e^{-st}f(t)]_\delta^A + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -f(0^+) + s\mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - s^{n-3}f''(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)}$$

<u>Stel</u>: $g(t) = \int_0^t f(u)du \rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0^+) \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Uit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ volgt voor de **invers Laplacegetransformeerde** $f(t)$ van $F(s)$:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

$F'(s) = \int\limits_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\} \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)}$$

<u>Stel</u>: $f(t) = 1 \rightarrow F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s} \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

<u>Stel</u>: $f(t) = t^n \mid n \in I\!N \rightarrow F(s) = \int\limits_0^\infty t^n e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\int\limits_0^\infty t^n d(e^{-st}) = \frac{n}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt \rightarrow$

$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n}{s}\mathcal{L}(t^{n-1}) \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

<u>Stel</u>: $f(t) = e^{at} \rightarrow F(s) = \int\limits_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{s-a} \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}$$

Analoog geldt voor e^{-at}:

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}}$$

<u>Stel</u>: $f(t) = \sin t \rightarrow F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\sin t dt = \frac{1}{1+s^2} \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{1+s^2}}$$

Analoog geldt voor $\cos t$:

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{1+s^2}}$$

$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+(s^2/a^2)} \rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{a^2+s^2}}$$

Analoog geldt voor $\cos at$:

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{a^2+s^2}}$$

$\mathcal{L}(e^{-at}\sin bt) = \mathcal{L}(\sin bt)_{s\to s+a} \to$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}\sin bt) = \frac{b}{b^2+(s+a)^2}}$$

Analoog geldt voor $e^{-at}\cos bt$:

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}\cos bt) = \frac{s+a}{b^2+(s+a)^2}}$$

Een LDV met constante coëfficiënten kan d.m.v. een Laplacetransformatie in een algebraïsche vergelijking worden omgezet waarin de beginvoorwaarden zijn verdisconteerd.

Stel: $a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \mid y(0) = y_0 \wedge y'(0) = y'_0 \to$

$a_2\mathcal{L}\{y''(t)\} + a_1\mathcal{L}\{y'(t)\} + a_0\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow$

$a_2[s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)] + a_1[s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)] + a_0\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f(t)\} + (a_2s+a_1)y_0 + a_2y'_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$

Het **convolutieprodukt** $f * g(t)$ van 2 functies $f(t)$ en $g(t)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{f * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

Voor het produkt van 2 Laplacetransformaties geldt nu:

$$\boxed{\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)}$$

Uit de definitie volgt: $f * 1(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$

Een **parabolische partiële differentiaalvergelijking** van de 2-de orde is van de vorm:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

Stel: $f(x,y) = X(x)Y(y) \to Y(y)\dfrac{d^2X}{dx^2} - kX(x)\dfrac{dY}{dy} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2X}{dx^2} = cX(x) \wedge \dfrac{dY}{dy} = \dfrac{c}{k}Y(y)$

Stel: $c = -a^2 \to X(x) = c_1\cos ax + c_2\sin ax \quad \wedge \quad Y(y) = c_3e^{-(a^2/k)y} \to$

$$\boxed{f(x,y) = (A\cos ax + B\sin ax)e^{-(a^2/k)y}}$$

Een **hyperbolische partiële differentiaalvergelijking** van de 2-de orde is van de vorm:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0}$$

Stel: $f(x,y) = X(x)Y(y) \to Y(y)\dfrac{d^2X}{dx^2} - a^2X(x)\dfrac{d^2Y}{dy^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{d^2X}{dx^2} = kX(x) \quad \wedge \quad \dfrac{d^2Y}{dy^2} = \dfrac{k}{a^2}Y(y)$

Stel: $k = b^2 \to X(x) = Ae^{bx} + Be^{-bx} \quad \wedge \quad Y(y) = Ce^{(b/a)y} + De^{-(b/a)y} \to$

$$\boxed{f(x,y) = (Ae^{bx} + Be^{-bx})(Ce^{(b/a)y} + De^{-(b/a)y})}$$

Stel: $k = -b^2 \to X(x) = A\cos bx + B\sin bx \quad \wedge \quad Y(y) = C\cos(b/a)y + D\sin(b/a)y \to$

$$\boxed{f(x,y) = (A\cos bx + B\sin bx)(C\cos(b/a)y + D\sin(b/a)y)}$$

Stel: $\left.\begin{array}{l} v = V(x,y) = y + ax \\ z = Z(x,y) = y - ax \end{array}\right\} \to f(x,y) = f^*(v,z)$

Substitutie in de hyperbolische PDV geeft: $\dfrac{\partial^2 f^*}{\partial z \partial v} = 0 \to \dfrac{\partial f^*}{\partial v} = F^*(v) \to$

$f^* = F(v) + G(z) \to$ **Oplossing van d'Alembert**:

$$\boxed{f(x,y) = F(y + ax) + G(y - ax)}$$

De **Laplacevergelijking** is van de vorm:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0}$$

Stel: $f(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \to Y(y)Z(z)\dfrac{d^2X}{dx^2} + X(x)Z(z)\dfrac{d^2Y}{dy^2} + X(x)Y(y)\dfrac{d^2Z}{dz^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{X(x)} \cdot \dfrac{d^2X}{dx^2} + \dfrac{1}{Y(y)} \cdot \dfrac{d^2Y}{dy^2} + \dfrac{1}{Z(z)} \cdot \dfrac{d^2Z}{dz^2} = 0 \to$

$\dfrac{d^2X}{dx^2} - a^2X(x) = 0 \quad \wedge \quad \dfrac{d^2Y}{dy^2} - b^2Y(y) = 0 \quad \wedge \quad \dfrac{d^2Z}{dz^2} - c^2Z(z) = 0 \to$

Oplossingen van de Laplacevergelijking in rechthoekige coördinaten zijn lineaire combinaties van de volgende termen:

$$\boxed{\begin{array}{l} X(x) = c_1\cosh ax + c_2\sinh ax \\ Y(y) = c_2\cosh by + c_4\sinh by \\ Z(z) = c_5\cosh cz + c_6\sinh cz \end{array}}$$

Overgang op cylindercoördinaten geeft: $f(x,y,z) \to V(\rho,\varphi,z)$:

$$\boxed{\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0}$$

Stel: $V(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \to$

$\dfrac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2} \cdot \dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \Phi(\varphi)Z(z)\dfrac{d^2R}{d\rho^2} + R(\rho)\Phi(\varphi)\dfrac{d^2Z}{dz^2} + \dfrac{\Phi(\varphi)Z(z)}{\rho} \cdot \dfrac{dR}{d\rho} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\rho^2\Phi(\varphi)} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{R(\rho)} \cdot \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R(\rho)} \cdot \frac{dR}{d\rho} = -\frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2Z}{dz^2} \to$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + kZ(z) = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{\rho^2\Phi(\varphi)} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{R(\rho)} \cdot \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R(\rho)} \cdot \frac{dR}{d\rho} = k$$

<u>Stel</u>: $k = -a^2 \to \dfrac{d^2Z}{dz^2} - a^2Z(z) = 0 \quad \wedge \quad -\dfrac{1}{\Phi(\varphi)} \cdot \dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \dfrac{\rho^2}{R(\rho)} \cdot \dfrac{d^2R}{d\rho^2} + \dfrac{\rho}{R(\rho)} \cdot \dfrac{dR}{d\rho} + a^2\rho^2 \to$

$$Z(z) = c_1e^{az} + c_2e^{-az} \quad \wedge \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \wedge \quad \rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + a^2\rho^2R(\rho) = m^2R(\rho) \to$$

$$\Phi(\varphi) = c_3\cos m\varphi + c_4\sin m\varphi$$

<u>Stel</u>: $x = a\rho \to R(\rho) \to R^*(x) \to x^2\dfrac{d^2R^*}{dx^2} + x\dfrac{dR^*}{dx} + (x^2 - m^2)R^*(x) = 0$

Dit is de DV van Bessel met als oplossing $J_m(x) \to$ oplossingen van de Laplacevergelijking in cylindercoördinaten zijn dan lineaire combinaties van de volgende termen:

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{ax}J_m(a\rho)\cos m\varphi,\ e^{ax}J_m(a\rho)\sin m\varphi \\ e^{-ax}J_m(a\rho)\cos m\varphi,\ e^{-ax}J_m(a\rho)\sin m\varphi \end{array}}$$

Overgang op bolcoördinaten geeft: $f(x, y, z) \to W(r, \varphi, \theta)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2W}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial\theta} = 0}$$

<u>Stel</u>: $W(r, \varphi, \theta) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta) \to$

$$\Phi(\varphi)\Theta(\theta)\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{R(r)\Theta(\theta)}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2} \cdot \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{2\Phi(\varphi)\Theta(\theta)}{r} \cdot \frac{dR}{dr} +$$

$$\frac{R(r)\Phi(\varphi)\cot\theta}{r^2} \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\frac{1}{R(r)}\left(r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr}\right) \to$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + cR(r) = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = c$$

<u>Stel</u>: $r = e^u \to R(r) \to R^*(u) \to \dfrac{d^2R^*}{du^2} + \dfrac{dR^*}{du} + cR^*(u) = 0 \to$ K.V.: $t^2 + t + c = 0$

<u>Stel</u>: $t_1 = m \to t_2 = -(m + 1)$, daar $t_1 + t_2 = -1 \to R^*(u) = c_1e^{mu} + c_2e^{-(m+1)u} \to$

$$R(r) = c_1r^m + c_2r^{-(m+1)}$$

$$c = -m(m + 1) \to \frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m(m + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\sin^2\theta + m(m + 1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \to$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\sin^2\theta + m(m+1)\sin^2\theta = n^2 \rightarrow$$

$$\Phi(\varphi) = c_3\cos n\varphi + c_4\sin n\varphi \quad \wedge \quad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \left\{m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta(\theta) = 0$$

<u>Stel</u>: $x = \cos\theta \rightarrow \Theta(\theta) \rightarrow \Theta^*(x) \rightarrow$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta^*}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta^*}{dx} + \left\{m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right\}\Theta^*(x) = 0$$

Dit is de geassocieerde DV van Legendre waarvan de oplossing van de vorm is $P_m^n(x) \rightarrow$ Oplossingen van de Laplacevergelijking in bolcoördinaten zijn dan lineaire combinaties van de volgende termen:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_m^n(\cos\theta)r^m\cos n\varphi,\ P_m^n(\cos\theta)r^m\sin n\varphi \\ P_m^n(\cos\theta)r^{-(m+1)}\cos n\varphi,\ P_m^n(\cos\theta)r^{-(m+1)}\sin n\varphi \end{array}}$$

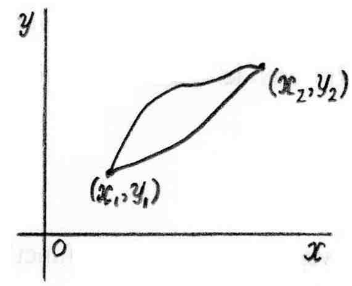
Voor oplossingen die onafhankelijk van φ zijn moet $n = 0$ zijn; de geassocieerde DV gaat dan over in de DV van Legendre.

Variatierekening

Een kromme $Y = y(x) \mid y(x_1) = y_1 \wedge y(x_2) = y_2$ is een **extreem** als voor een gegeven functie $F(x, y, y')$ de integraal $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ of een min. of een max. is, ofwel een **extremum** of **stationaire waarde**. Een dergelijke integraal heet een **functionaal**.

<u>Stel</u>: De kromme $Y = y(x)$ verbindt de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) zo, dat $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ een extremum is.

$Y = y(x) + \epsilon\eta(x) \mid \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$



Voor de integraal $I(\epsilon)$ langs de 2-de kromme geldt:

$I(\epsilon) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta(x))dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(\epsilon)dx \rightarrow$

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F(\epsilon)}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F(\epsilon)}{\partial y'}\eta'(x) \right\} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(\epsilon)}{\partial y}\eta(x)dx + \left[\frac{\partial F(\epsilon)}{\partial y'}\eta(x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(\epsilon)}{\partial y'}\right)\eta(x)dx \rightarrow$$

$$\left[\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \eta(x)dx \rightarrow$$

$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ is een extremum als $[dI(\epsilon)/d\epsilon]_{\epsilon=0} = 0$, ofwel als de integraal in het rechterlid nul is. Daar $\eta(x)$ een willekeurige functie is, volgt hieruit de <u>**Eulervergelijking**</u>:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0}$$

Dit is een *noodzakelijke* voorwaarde opdat $Y = y(x)$ een extreem is.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' \\ &\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} - y'\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0}$$

Als $F(x, y, y')$ niet expliciet van x afhangt, dan is $\partial F/\partial x = 0 \rightarrow$

$$\boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Een **nevenvoorwaarde** is een conditie waarbij de kromme waarvoor $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ een extremum is tevens de integraal $\int\limits_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')dx$ constant houdt.

Een **isoperimetrisch probleem** is hiervan een bijzonder geval, nl. dat waarbij de kromme een bepaalde lengte heeft zo, dat de door de kromme omsloten oppervlakte max. is.
Vermenigvuldiging van de 2-de integraal met een constante λ en optelling bij de 1-ste integraal geeft $\int\limits_{x_1}^{x_2}(F+\lambda G)dx$, welke dan een extremum moet zijn. Met $H = F + \lambda G$ wordt de bijbehorende Eulervergelijking dan:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) - \frac{\partial H}{\partial y} = 0}$$

De **variatie** δF van een functie $F(x,y,y')$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\epsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\epsilon\eta'}$$

<u>Stel</u>: $F = y$ resp. $F' = y \to \delta y = \epsilon\eta$ resp. $\delta y' = \epsilon\eta' \to$

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'}$$

Uit $\delta y' = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \epsilon\eta' = \frac{d}{dx}(\epsilon\eta) = \frac{d}{dx}(\delta y)$ volgt:

$$\boxed{\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)}$$

Als $F_1 = F_1(x,y,y')$ en $F_2 = F_2(x,y,y')$, dan geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\delta(F_1+F_2) = \delta F_1 + \delta F_2 \\
\delta(F_1F_2) = F_2\delta F_1 + F_1\delta F_2 \\
\delta\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right) = \dfrac{F_2\delta F_1 - F_1\delta F_2}{F_2^2} \\
\delta F^n = nF^{n-1}\delta F \mid n \in I\!R \\
\delta y^{(n)} = (\delta y)^{(n)} \mid n \in I\!R
\end{array}}$$

Analoog aan het differentiëren onder het integraalteken geldt:

$$\boxed{\delta\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\delta F(x,y,y')dx}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right\}dx=0 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\epsilon\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\epsilon\eta'(x)\right\}dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right\}dx=\int_{x_1}^{x_2}\delta F dx=\delta\int_{x_1}^{x_2}F dx=0 \to$$

Als $\int_{x_1}^{x_2} F dx = 0$ een extremum is, dan is een noodzakelijke voorwaarde dat geldt:

$$\boxed{\delta\int_{x_1}^{x_2}F dx=0}$$

<u>Stel</u>: $F = F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \mid \dot{x}_i = dx_i/dt \mid i = 1, 2, \ldots, n \to$

Analoog aan $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ geldt dat voor de noodzakelijke voorwaarde opdat $\int_{x_1}^{x_2} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)dt$ een extremum is, moet gelden:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right)-\frac{\partial F}{\partial x_k}=0 \;\Big|\; k=1,2,\ldots,n}$$

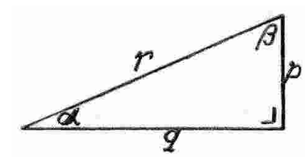
<u>Stel</u>: $I = \int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^2 - q(x)y^2]dx$ met nevenvoorwaarde $J = \int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2dx = 1 \to$

$H = I - \lambda J = \int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^2 - q(x)y^2 - \lambda r(x)y^2]dx = \int_{x_1}^{x_2} F dx \to$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \to$

De extremen van I onder de nevenvoorwaarde J zijn oplossingen van de Sturm-Liouvillevergelijking.

Goniometrie en Trigonometrie



De **goniometrische verhoudingen** sin, cos en tan van een hoek α in een scherphoekige driehoek ABC worden gedefinieerd als:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{p}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{q}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{p}{q} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

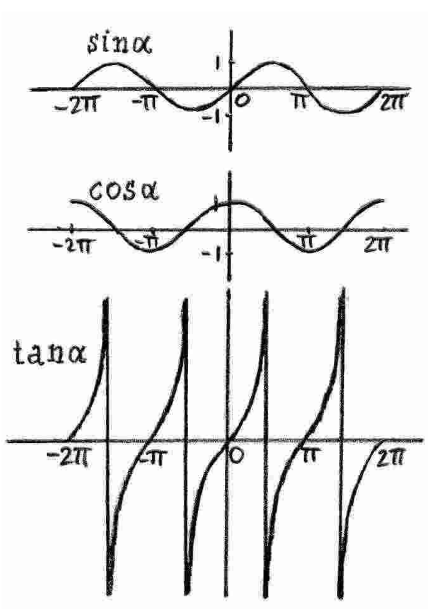
Hieruit worden de volgende goniometrische verhoudingen gedefinieerd:

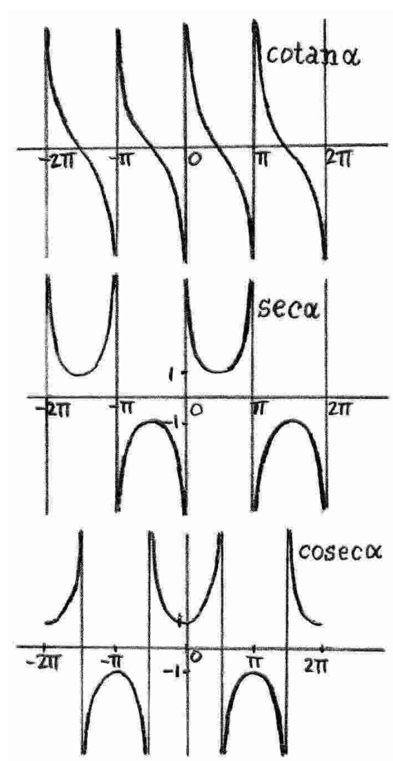
$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos\beta \\ \cos\alpha &= \sin\beta \\ \cot\alpha &= \tan\beta \\ \beta &= \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) \\ \cos\alpha &= \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) \\ \cot\alpha &= \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) \end{aligned}}$$

$$p^2 + q^2 = r^2 \rightarrow (p/q)^2 + (q/r)^2 = 1 \rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Hieruit volgt: $$\boxed{\begin{aligned} \tan^2\alpha + 1 &= \sec^2\alpha \\ \cot^2\alpha + 1 &= \operatorname{cosec}^2\alpha \end{aligned}}$$

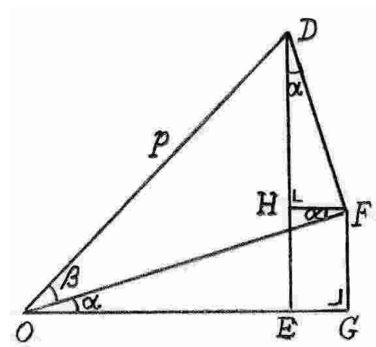




Uit de goniometrische grafieken volgt:

$$\begin{array}{|ll|}\hline \sin(-\alpha) = -\sin\alpha & \sin\alpha = \sin(\pi-\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha & \cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha) \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha & \tan\alpha = -\tan(\pi-\alpha) \\ & \\ \sin\alpha = -\cos(\frac{1}{2}\pi+\alpha) & \sin\alpha = -\sin(\pi+\alpha) \\ \cos\alpha = \sin(\frac{1}{2}\pi+\alpha) & \cos\alpha = -\cos(\pi+\alpha) \\ \tan\alpha = -\cot(\frac{1}{2}\pi+\alpha) & \tan\alpha = \tan(\pi+\alpha) \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \sin\alpha = \sin(\alpha+2k\pi) & \\ \cos\alpha = \cos(\alpha+2k\pi) & k\in\mathbb{Z} \\ \tan\alpha = \tan(\alpha+k\pi) & \end{array}}$$



$$\left.\begin{array}{l} \overline{FG} = \overline{OF}\sin\alpha = p\cos\beta\sin\alpha \\ \overline{OG} = \overline{OF}\cos\alpha = p\cos\beta\cos\alpha \\ \overline{DH} = \overline{DF}\cos\alpha = p\sin\beta\cos\alpha \\ \overline{HF} = \overline{DF}\sin\alpha = p\sin\beta\sin\alpha \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta) = \overline{DE}/p = (p\sin\beta\cos\alpha + p\cos\beta\sin\alpha)/p) \\ \cos(\alpha+\beta) = \overline{OE}/p = (p\cos\beta\cos\alpha - p\sin\beta\sin\alpha)/p \\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{p\sin\beta\cos\alpha + p\cos\beta\sin\alpha}{p\cos\beta\cos\alpha - p\sin\beta\sin\alpha} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \end{array}}$$

Substitutie van $\beta = -\beta$ geeft:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \end{array}}$$

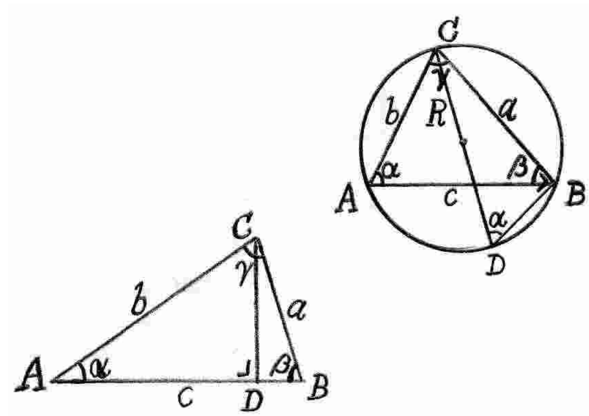
Substitutie van $\beta = \alpha$ geeft:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{array}}$$

Hieruit volgt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha & \sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \\ \cos\alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha & \cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha) \\ \tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha} & \end{array}}$$

$\overline{BC} = \overline{CD}\sin\alpha \to a = 2R\sin\alpha \wedge b = 2R\sin\beta \wedge c = 2R\sin\gamma \to$



Sinusregel: $\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{CD}^2 = b^2\sin^2\alpha \\ \overline{DB}^2 = (c-\overline{AD})^2 = (c-b\cos\alpha)^2 \end{array}\right\} \to$$

Cosinusregels: $\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{array}}$

Optelling en deling door 2 geeft:

$$\boxed{bc\cos\alpha + ca\cos\beta + ab\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AD} = b\cos\alpha \\ \overline{DB} = a\cos\beta \end{array}\right\} \to \quad \boxed{c = a\cos\beta + b\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{a\sin\beta}{c-\overline{DB}} \to$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a\sin\beta}{c-a\cos\beta}}$$

$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$; analoog voor $\sin\frac{1}{2}\alpha$.

<u>Stel</u>: $b+c+a = 2s \to$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(s-b)(s-c)/bc} \\ \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{s(s-a)/bc} \end{array}}$$

Hieruit volgt voor $\tan\frac{1}{2}\alpha$:

$$\boxed{\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{(s-b)(s-c)(s-a)}}$$

$Opp.\ \triangle ABC = \frac{1}{2}c.h = \frac{1}{2}c.b \sin\alpha \rightarrow$

$$\boxed{Opp.\ \triangle ABC = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha}$$

$O = \frac{1}{2}.2R\sin\alpha.2R\sin\beta\sin\gamma \rightarrow$

$$\boxed{Opp.\ \triangle ABC = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha \rightarrow$

$$\boxed{Opp.\ \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Optelling van $\sin(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha-\beta)$ geeft: $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$; substitutie van $\alpha+\beta = p$ en $\alpha-\beta = q$ geeft dan de zgn. **p,q-formules**:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin p + \sin q = & 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) \\ \sin p - \sin q = & 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q) \\ \cos p + \cos q = & 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) \\ \cos p - \cos q = & -2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q) \end{array}}$$

$$\frac{a+B}{a-b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \rightarrow$$

Tangensregel:

$$\boxed{\frac{a+B}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}$$

Uit de goniometrische grafieken volgt:

$$\begin{array}{l} \sin x = \sin\alpha \;\;\Rightarrow\;\; x = \alpha + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \cos\alpha \;\;\Rightarrow\;\; x = \pm\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = \tan\alpha \;\;\Rightarrow\;\; x = \alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cos x + b\sin x = c \\ \underline{\text{Stel}}: \tan\varphi = b/a \end{array}\right\} \rightarrow \cos x + \tan\varphi\sin x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

Hieruit volgt voor de voorwaarde voor oplosbaarheid:

$$\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \leq 1 \Leftrightarrow \cos^2\varphi \leq \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} \rightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$$

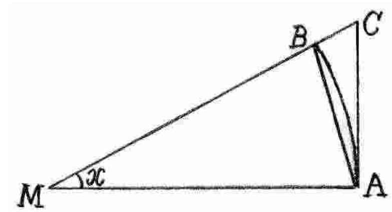
$$f(x) = a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right\} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

$Opp.\ \triangle MAB < Opp.\ MAB < Opp.\ \triangle MAC \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}r.r\sin x < \frac{1}{2}xr^2 < \frac{1}{2}r.r\tan x \Leftrightarrow 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$

$1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x \rightarrow$



$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Uit deling van $1 > \sin x/x > \cos x$ door $\cos x$ volgt:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1}$$

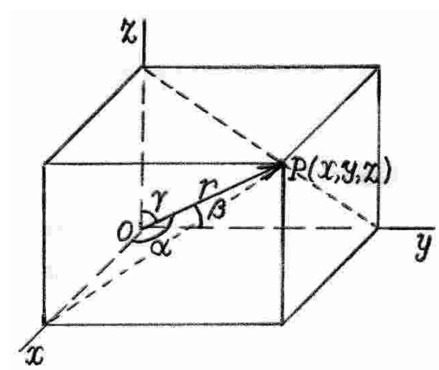
Uit de reeksontwikkeling van $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ volgt dat deze voor kleine positieve waarden van x te benaderen zijn als functie van x:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x \approx x \\ \tan x \approx x \\ \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{array}}$$

Als $\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ een hoek α met de pos. X-as, een hoek β met de pos. Y-as en een hoek γ met de pos. Z-as maakt, dan geldt:

$\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{r}|} \wedge \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{r}|} \wedge \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{r}|} \rightarrow$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^2} \rightarrow$



$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

De getallen $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ heten de **richtingscosinussen** van de vector $\vec{OP}$.

Overige goniometrische identiteiten:

$$
\begin{aligned}
&\sec^2\alpha\,\mathrm{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha + \mathrm{cosec}^2\alpha\\
&\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
&\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&\sec\alpha - \cos\alpha = \tan\alpha\sin\alpha\\
&\sin\alpha\sec\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha = \sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha\\
&\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha\\
&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha\\
&\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\
&\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
&\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\\
&(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\
&(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\
&\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta\\
&\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha\\
&\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\sin 2\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\\
&\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\sin 4\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha\\
&\cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 6\alpha - \cos 8\alpha = 4\sin 5\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha\\
&\sin^3\alpha = \tfrac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)\\
&\cos^3\alpha = \tfrac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sec\alpha - \tan\alpha\\
&\frac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\\
&\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\\
&\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\\
&\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha - \sin\alpha} = \tan^3\alpha\\
&\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\\
&\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\
&\frac{1+\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tan(\alpha + \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}\\
&\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\
&\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\
&\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\\
&\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\\
&\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\\
&\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = -\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}\\
&\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{2}{1-2\cos^2\alpha}
\end{aligned}
$$

Vectoranalyse

Voor 2 vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \\ \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} \\ m\vec{A}=\vec{A}m \mid m\in I\!R \\ m(n\vec{A})=(mn)\vec{A} \mid m,n\in I\!R \\ (m+n)\vec{A}=m\vec{A}+n\vec{A} \mid m,n\in I\!R \\ m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+m\vec{B} \mid m\in I\!R \end{array}}$$

Voor een **rechtsdraaiend** rechthoekig coördinatenstelsel met eenheidsvectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ geldt dat rotatie van $\vec{i}$ naar $\vec{j}$ over de kleinste hoek de richting van $\vec{k}$ geeft.

Een vector $\vec{A}$ is in componentvorm te schrijven als:

$$\boxed{\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}}$$

Voor de **grootte** ofwel **magnitude** geldt:

$$\boxed{|\vec{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$$

Voor de **positievector** $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ geldt dan:

$$\boxed{|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Het **scalarprodukt** $\vec{A}\cdot\vec{B}$ van 2 vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ die een hoek θ met elkaar maken wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

In componentvorm is $\vec{A}\cdot\vec{B}$ te schrijven als:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3}$$

Voor het scalarprodukt geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \\ m(\vec{A}\cdot\vec{B})=(m\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(m\vec{B}) \mid m\in I\!R \\ \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0 \end{array}}$$

Tevens geldt:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\vec{A}\perp\vec{B} \mid \vec{A}=\vec{B}\neq 0}$$

Het **vectorprodukt** $\vec{A} \times \vec{B}$ van 2 vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ die een hoek θ met elkaar maken wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \vec{u}}$$

Hierin is $\vec{u}$ een eenheidsvector in de richting van $\vec{A} \times \vec{B}$.

In componentvorm is $\vec{A} \times \vec{B}$ te schrijven als:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k}}$$

Voor het vectorprodukt geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}) \\ \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \\ m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) \mid m \in I\!R \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \ \wedge \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \ \wedge \ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{array}}$$

Tevens geldt: $\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B} \mid \vec{A} = \vec{B} \neq \vec{0}}$

$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = A^2B^2 \sin^2\theta + A^2B^2 \cos^2\theta \rightarrow$

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2}$$

Het **scalar tripelprodukt** $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ van 3 vectoren $\vec{A}, \vec{B}$ en $\vec{C}$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}}$$

Het **vector tripelprodukt** $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})}$$

Tevens geldt: $\boxed{\begin{array}{l} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{array}}$

<u>Vector identiteiten</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0} \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{D}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{D}) - \vec{D}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}) \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})^2 \\ (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A}) = 2\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) + (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot (\vec{A} \times \vec{D}) + (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot (\vec{B} \times \vec{D}) = 0 \end{array}}$$

De afgeleide functie van een vector $\vec{R}(u)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u}}$$

Stel: $\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \rightarrow$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du}\vec{i} + \frac{dy}{du}\vec{j} + \frac{dz}{du}\vec{k}}$$

Als $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\vec{C}$ differentieerbare vectorfuncties van u zijn en ϕ een differentieerbare scalaire functie van u is, dan geldt:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{d}{du}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} \pm \frac{d\vec{B}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \frac{d\phi}{du}\vec{A} + \phi\frac{d\vec{A}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}) = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \times \vec{C} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} \times \vec{C} + \vec{A} \cdot \vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{du} \\
&\frac{d}{du}\{\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})\} = \frac{d\vec{A}}{du} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{A} \times \left(\frac{d\vec{B}}{du} \times \vec{C}\right) + \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{du}\right)
\end{aligned}}$$

De partiële afgeleide functie van een vector $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ naar x wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x + \Delta x, y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta x}}$$

Analoge definities gelden voor $\partial\vec{A}/\partial y$ en $\partial\vec{A}/\partial z$.

Voor de 2-de orde afgeleide functies geldt:

$$\boxed{\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y\partial x}}$$

Stel: $\vec{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k} \rightarrow$

$$\boxed{d\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz}$$

Stel: $|\vec{A}| =$const. $\rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}| =$const. $\rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \rightarrow$

$$\boxed{|\vec{A}| = \text{const.} \ \Rightarrow \vec{A} \perp d\vec{A}/dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA^2}{dt} \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}}$$

<u>Stel</u>: $\vec{F}(x,y,z,t) = F_1(x,y,z,t)\vec{i} + F_2(x,y,z,t)\vec{j} + F_3(x,y,z,t)\vec{k} \rightarrow$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

De **Nabla-operator** ∇ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

De **gradiënt** $\nabla\phi$ van een scalaire functie $\phi(x,y,z)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}}$$

$$\nabla\Phi\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz \rightarrow$$

$$\boxed{\nabla\Phi\cdot d\vec{r} = d\Phi}$$

De **divergentie** $\nabla\cdot\vec{V}$ van een vectorfunctie $\vec{V}(x,y,z)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}}$$

De **rotatie** $\nabla\times\vec{V}$ van een vectorfunctie $\vec{V}(x,y,z)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

<u>**Nabla-identiteiten**</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{A} + \phi(\nabla\cdot\vec{A}) \\
\nabla\times(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi(\nabla\times\vec{A}) \\
\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) \\
\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) \\
\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) \\
\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi \\
\nabla\times(\nabla\phi) = \vec{0} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}
\end{array}}$$

$$\nabla r^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}n} \Leftrightarrow$$

$$\nabla r^n = \frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}n}\}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}n}\}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}n}\}\vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\nabla r^n = n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}n-1}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = n(r^2)^{\frac{1}{2}n-1}\vec{r} \to$$

$$\boxed{\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}}$$

Voor $n = -1$ volgt hieruit:

$$\boxed{\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

$$\nabla \ln|\vec{r}| = \tfrac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow$$

$$\nabla \ln|\vec{r}| = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\{\ln(x^2+y^2+z^2)\}\vec{i} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\{\ln(x^2+y^2+z^2)\}\vec{j} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\{\ln(x^2+y^2+z^2)\}\vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\nabla \ln|\vec{r}| = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2} \to$$

$$\boxed{\nabla \ln|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{r^2}}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \to$$

$$\boxed{\nabla^2\frac{1}{r} = 0}$$

$$\nabla^2 \ln r = \frac{y^2+z^2-x^2}{r^4} + \frac{x^2+z^2-y^2}{r^4} + \frac{x^2+y^2-z^2}{r^4} = \frac{r^2}{r^4} \to$$

$$\boxed{\nabla^2 \ln r = \frac{1}{r^2}}$$

$$\nabla^2 r^n = nr^{n-2} + (n^2-2n)x^2r^{n-4} + nr^{n-2} + (n^2-2n)y^2r^{n-4} + nr^{n-2} + (n^2-2n)z^2r^{n-4} \Leftrightarrow$$

$$\nabla^2 r^n = 3nr^{n-2} + (n^2-2n)r^{n-2} \to$$

$$\boxed{\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}}$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla\cdot(r^{-3}\vec{r}) = (\nabla r^{-3})\cdot\vec{r} + r^{-3}\nabla\cdot\vec{r} = -3r^{-5}\vec{r}\cdot\vec{r} + r^{-3}\cdot 3 \to$$

$$\boxed{\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\cdot(U\nabla V) = \nabla U\cdot\nabla V + U(\nabla\cdot\nabla V) = \nabla U\cdot\nabla V + U\nabla^2 V \\ \nabla\cdot(V\nabla U) = \nabla V\cdot\nabla U + V(\nabla\cdot\nabla U) = \nabla U\cdot\nabla V + V\nabla^2 U \end{array}\right\} \to$$

$$\boxed{\nabla\cdot(U\nabla V - V\nabla U) = U\nabla^2 V - V\nabla^2 U}$$

$\nabla \times \{\vec{r}f(r)\} = \nabla \times \{xf(r)\vec{i} + yf(r)\vec{j} + zf(r)\vec{k}\} \Leftrightarrow$

$\nabla \times \{\vec{r}f(r)\} = \left(z\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(x\dfrac{\partial f}{\partial z} - z\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{f'(r)x}{r}$; analoog voor $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial z}$; substitutie geeft dan:

$$\boxed{\nabla \times \{\vec{r}f(r)\} = \vec{0}}$$

$\nabla \times \dfrac{\vec{r}}{r^2} = \nabla \times (r^{-2}\vec{r}) = (\nabla r^{-2}) \times \vec{r} + r^{-2}\nabla \times \vec{r} = -2r^{-4}\vec{r} \times \vec{r} \rightarrow$

$$\boxed{\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^2} = \vec{0}}$$

$\nabla f(r) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \dfrac{f'(r)x}{r}\vec{i} + \dfrac{f'(r)y}{r}\vec{j} + \dfrac{f'(r)z}{r}\vec{k} \rightarrow$

$$\boxed{\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{f'(r)x}{r} = \dfrac{f'(r)\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}}{r} \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{f'(r)\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}}{r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\{f''(r)\sqrt{r^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{2}f'(r)(r^2 - y^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}\}r - f'(r)\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}}{r^2} \cdot \dfrac{\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}}{r} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{f''(r)x^2}{r^2} + \dfrac{f'(r)}{r} - \dfrac{f'(r)x^2}{r^3}$; analoog voor $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \rightarrow$

$\nabla^2 f(r) = \dfrac{f''(r)}{r^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \dfrac{3f'(r)}{r} - \dfrac{f'(r)}{r^3}(x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{df(r)}{dr}}$$

<u>Stel</u>: $F = F\{x(t), y(t), z(t)\} \rightarrow \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial t} \Leftrightarrow$

$\dfrac{dF}{dt} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial t} \rightarrow$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \rightarrow \nabla \cdot (\nabla\phi\psi) = \nabla \cdot (\psi\nabla\phi) + \nabla \cdot (\phi\nabla\psi) \Leftrightarrow$
$\nabla^2(\phi\psi) = (\nabla\psi) \cdot (\nabla\phi) + \psi(\nabla \cdot \nabla\phi) + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi(\nabla \cdot \nabla\psi) \rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla^2\phi}$$

De integraal van een vectorfunctie $\vec{R}(u) = R_1(u)\vec{i} + R_2(u)\vec{j} + R_3(u)\vec{k}$ van $u = a$ naar $u = b$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\int\limits_a^b \vec{R}(u)du = \vec{i}\int\limits_a^b R_1(u)du + \vec{j}\int\limits_a^b R_2(u)du + \vec{k}\int\limits_a^b R_3(u)du}$$

Als $\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$ een kromme C bepaalt van $P_1(a)$ naar $P_2(b)$, en $\vec{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$ is een vectorfunctie langs C, dan wordt de lijnintegraal van $\vec{A}$ langs C van $P_1(a)$ naar $P_2(b)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{\int\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int\limits_C A_1dx + A_2dy + A_3dz}$$

$$\int \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}dt = \int\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}\right)dt \rightarrow$$

$$\boxed{\int \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}dt = \vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{C}}$$

<u>Stel</u>: $\vec{F} = \nabla\phi \rightarrow \int\limits_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \Leftrightarrow$

$$\int\limits_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{P_1}^{P_2}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \int\limits_{P_1}^{P_2}d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) \rightarrow$$

$\vec{F} = \nabla\phi \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ is onafhankelijk van de weg van P_1 naar P_2.

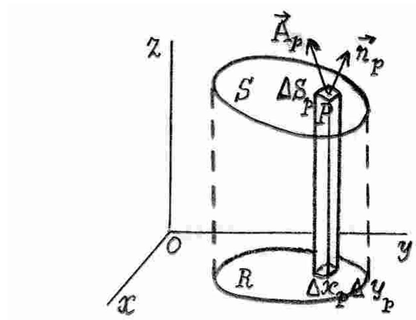
$\vec{F} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla\times\vec{F} = \nabla\times\nabla\phi = \vec{0}$; $\vec{F}$ is dan **conservatief**.

Voor een gesloten kromme C geldt dan:

$$\boxed{\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$$

Als $\Delta S_p \mid p = 1,2,\ldots,n$ een oppervlakte-element van een oppervlak S is, $\vec{A}$ een vectorfunctie door S, $\vec{A}_p(x_p,y_p,z_p) = \vec{A}_p \mid P(x_p,y_p,z_p) \in \Delta S_p$ en $\vec{n}_p$ de eenheidsnormaalvector in P, dan wordt de **oppervlakte integraal** van $\vec{A}$ over S gedefinieerd als:

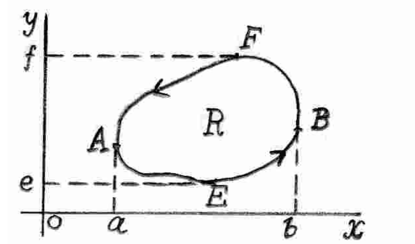
$$\boxed{O = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\vec{A}_p\cdot\vec{n}_p\Delta S_p = \iint\limits_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}$$



Hierin is $\vec{A}_p \cdot \vec{n}_p$ de normale component van $\vec{A}_p$ in P.
Als R de projectie is van S op het XY-vlak, dan geldt:

$\Delta S_p = \dfrac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\vec{n}_p \cdot \vec{k}|} \rightarrow$

$$\boxed{O = \iint\limits_R \vec{A} \cdot \vec{n} \frac{dxdy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}}$$



<u>Stel</u>: $\left.\begin{array}{l} \text{bg } AEB : y = Y_1(x) \text{ en bg } AFB : y = Y_2(x) \\ M \text{ en } N \text{ willekeurige functies van } x \text{ en } y \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\iint\limits_R \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = \int\limits_{x=a}^{x=b} \left\{ \int\limits_{y=Y_1(x)}^{y=Y_2 2} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right\} dx = \int\limits_a^b \{M(x, Y_2) - M(x, Y_1)\} dx \Leftrightarrow$$

$$\iint\limits_R \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = -\int\limits_a^b M(x, Y_1) dx - \int\limits_a^b M(x, Y_2) dx = -\oint\limits_C M dx$$

Analoog voor bg $EAF : x = X_1(y)$ en bg $EBF : x = X_2(y)$: $\iint\limits_R \dfrac{\partial N}{\partial x} dxdy = \oint\limits_C N dy \rightarrow$

<u>**Stelling van Green**</u>:

$$\boxed{\iint\limits_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_C M dx + N dy}$$

<u>Stel</u>: $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = M\vec{i} + N\vec{j} \\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{A} \cdot d\vec{r} = (M\vec{i} + N\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = M dx + N dy \wedge$

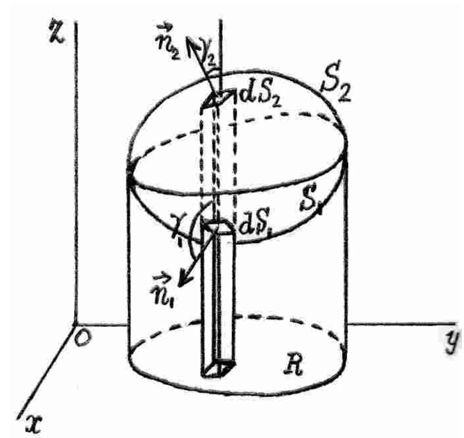
$$\nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial N}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} \rightarrow (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \rightarrow$$

$$\boxed{\iint\limits_R (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{k} dR = \oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r}}$$

<u>Stel</u>: $M = -y \wedge N = x \rightarrow 2 \iint\limits_R dxdy = 2\text{Opp.} = \oint\limits_C xdy - ydx \rightarrow$

$$\boxed{\text{Opp.} = \tfrac{1}{2} \oint\limits_C xdy - ydx}$$

Stel: $\begin{array}{l} S_1 : z = f_1(x,y) \\ S_2 : z = f_2(x,y) \end{array}$



Als R de projectie van het gesloten oppervlak S rond volume V op het XY-vlak is, dan geldt:

$$\int\int_V\int \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz = \iint_R \left\{ \int_{z=f_1}^{z=f_2} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right\} dxdy \Leftrightarrow$$

$$\int\int_V\int \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz = \iint_R \{A_3(x,y,f_2) - A_3(x,y,f_1)\}\, dxdy$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Voor } S_2 \text{ geldt: } \cos\gamma_2 dS_2 = \vec{k}\cdot\vec{n}_2 dS_2 \\ \text{Voor } S_1 \text{ geldt: } -\cos\gamma_1 dS_1 = \vec{k}\cdot\vec{n}_1 dS_1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\int\int_V\int \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz = \iint_{S_2} A_3\vec{k}\cdot\vec{n}_2 dS_2 + \iint_{S_1} A_3\vec{k}\cdot\vec{n}_1 dS_1 = \iint_S A_3\vec{k}\cdot\vec{n}dS$$

Analoog voor $\int\int_V\int \frac{\partial A_1}{\partial x} dxdydz$ en $\int\int_V\int \frac{\partial A_2}{\partial y} dxdydz \rightarrow$

Divergentietheorema:

$$\boxed{\int\int_V\int \nabla\cdot\vec{A}dV = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS}$$

$$\iint_S \vec{r}\cdot ndS = \int\int_V\int \nabla\cdot\vec{r}dV = \int\int_V\int \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV = 3V$$

Stel: $\vec{A} = \phi\vec{C} \mid \vec{C} =$const. $\rightarrow \int\int_V\int \nabla\cdot\phi\vec{C}dV = \iint_S \phi\vec{C}d\vec{S} \Leftrightarrow$

$\iint_V \{(\nabla\phi)\cdot\vec{C} + \phi(\nabla\cdot\vec{C})\}dV = \vec{C}\cdot \iint_S \phi d\vec{S} \Leftrightarrow \vec{C}\cdot\int\int_V\int \nabla\phi dV = \vec{C}\cdot \iint_S \phi d\vec{S} \rightarrow$

$$\boxed{\int\int_V\int \nabla\phi dV = \iint_S \phi d\vec{S}}$$

$\int\int_V\int \nabla\cdot\vec{n}dV = \iint_S \vec{n}\cdot\vec{n}dS = \iint_S dS \rightarrow$

$$\boxed{\int\int_V\int \nabla\cdot\vec{n}dV = S}$$

Substitutie van $\vec{A} = \phi\nabla\psi$ in het Divergentietheorema geeft:
$\int\int_V\int \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\vec{S}$

Substitutie van $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi$ geeft de **Eerste identiteit van Green**:

$$\boxed{\int\int_V\int \{\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\}dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\vec{S}}$$

Verwisseling van ϕ en ψ en aftrekking geeft de **Tweede identiteit van Green**:

$$\boxed{\int\limits_{V}\int\int\{\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\}dV = \iint\limits_{S}\{\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\}\cdot d\vec{S}}$$

Uit $\nabla\psi\cdot\vec{n} = d\psi/dn$ en $\nabla\phi\cdot\vec{n} = d\phi/dn$ volgt:

$$\boxed{\int\limits_{V}\int\int\{\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\}dV = \iint\limits_{S}\left\{\phi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\phi}{dn}\right\}dS}$$

Substitutie van $\vec{A} = \phi\vec{C}\mid\vec{C}$ =const. in het Divergentietheorema geeft:

$\int\limits_{V}\int\int\nabla\cdot(\phi\vec{C})dV = \iint\limits_{S}\phi\vec{C}\cdot\vec{n}dS \Leftrightarrow \int\limits_{V}\int\int\vec{C}\cdot\nabla\phi dV = \iint\limits_{S}\vec{C}\cdot(\phi\vec{n})dS \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_{V}\int\int\nabla\phi dV = \iint\limits_{S}\phi d\vec{S}}$$

Substitutie van $\vec{A} = \vec{B}\times\vec{C}\mid\vec{C}$ =const. in het Divergentietheorema geeft:

$\int\limits_{V}\int\int\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{C})dV = \iint\limits_{S}(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{N}dS \Leftrightarrow \int\limits_{V}\int\int\vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{B})dV = \iint\limits_{S}\vec{C}\cdot(\vec{n}\times\vec{B})dS \rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_{V}\int\int\nabla\times\vec{B}dV = \iint\limits_{S}\vec{n}\times\vec{B}dS}$$

$\iint\limits_{S}\vec{n}\times\vec{r}dS = -\iint\limits_{S}\vec{r}\times\vec{n}dS = -\iint\limits_{V}\nabla\times\vec{n}dV = 0 \rightarrow$

$$\boxed{\iint\limits_{S}\vec{r}\times d\vec{S} = 0}$$

Substitutie van $\vec{A} = \vec{r}/r^3$ in het Divergentietheorema geeft: $\int\limits_{V}\int\int\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}dV = \iint\limits_{S}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS$

Als $r\neq 0$ in V, d.w.z. $O\notin V$, dan is $\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \rightarrow \iint\limits_{S}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS = 0$

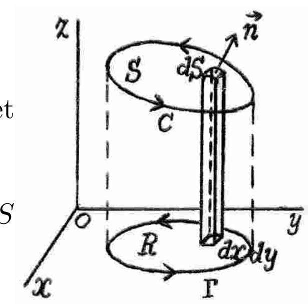
<u>Stel</u>: $\left.\begin{array}{l}s \text{ is een boloppervlak rond } O \text{ met straal } a \text{ met } O\in V\\ \tau \text{ is het gebied begrensd door } S \text{ en } s\end{array}\right\}\rightarrow$

$$\int\limits_{S+s}\int\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS = \iint\limits_{S}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS + \iint\limits_{s}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS = \int\limits_{V}\int\int\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}dV = 0 \ (r\neq 0 \text{ in } \tau)$$

Op s geldt: $r = a\wedge\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{a} \rightarrow \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3} = -\frac{1}{a^2} \rightarrow \iint\limits_{S}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS = \frac{1}{a^2}\iint\limits_{s}dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} \rightarrow$

Stelling van Gauss:

$$\boxed{\iint\limits_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS = 4\pi}$$



Stel: S is een open oppervlak begrensd door een kromme C en met vergelijking $z = f(x,y)$ resp. $x = g(y,z)$ resp. $y = h(x,z)$

$\nabla\times A_1\vec{i} = \dfrac{\partial A_1}{\partial z}\vec{j} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y}\vec{k} \to (\nabla\times A_1\vec{i})\cdot\vec{n}dS = \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial z}\vec{j}\cdot\vec{n} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y}\vec{k}\cdot\vec{n}\right)dS$

$S: z = f(x,y) \Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k} \to \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{k} \parallel S \to$

$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y} \perp \vec{n} \to \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y}\cdot\vec{n} = \vec{j}\cdot\vec{n} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{k}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{j}\cdot\vec{n} = -\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{k}\cdot\vec{n} \to$

$(\nabla\times A_1\vec{i})\cdot\vec{n}dS = -\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial y} + \dfrac{\partial A_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}\cdot\vec{n}dS$

Op S geldt: $A_1(x,y,z) = A_1(x,y,f(x,y)) = F(x,y) \to \dfrac{\partial A_1}{\partial y} + \dfrac{\partial A_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} \to$

$\iint\limits_S (\nabla\times A_1\vec{i})\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_R -\dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{k}\cdot\vec{n}dS = -\iint\limits_R \dfrac{\partial F}{\partial y}dxdy$

Als Γ de grenskromme is van R, zijnde de projectie van S op het XY-vlak, dan is de dubbelintegraal over R volgens de Stelling van Green gelijk aan $\oint\limits_\Gamma Fdx$. Daar voor $\forall(x,y)\in\Gamma$ de waarde van F gelijk is aan de waarde van A_1 in elk punt $(x,y,z)\in C$, geldt: $\oint\limits_\Gamma Fdx = \oint\limits_\Gamma A_1dx \to$

$\iint\limits_S (\nabla\times A_1\vec{i})\cdot\vec{n}dS = \oint\limits_C A_1dx$. Analoge uitdrukkingen gelden voor A_2 en $A_3 \to$

Stelling van Stokes:

$$\boxed{\iint\limits_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}dS = \oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r}}$$

Substitutie van $\vec{A} = \phi\vec{C} \mid \vec{C}$ =const. in de Stelling van Stokes geeft:

$\iint\limits_S \nabla\times(\phi\vec{C})\cdot d\vec{S} = \oint\limits_C \phi\vec{C}\cdot d\vec{r} \Leftrightarrow \iint\limits_S \{(\nabla\phi)\times\vec{C} + \phi(\nabla\times\vec{C})\}\cdot d\vec{S} = \vec{C}\cdot\oint\limits_C \phi d\vec{r} \Leftrightarrow$

$\vec{C}\cdot\iint\limits_S d\vec{S}\times(\nabla\phi) = \vec{C}\cdot\oint\limits_C \phi d\vec{r} \to$

$$\boxed{\iint\limits_S d\vec{S}\times\nabla\phi = \oint\limits_C \phi d\vec{r}}$$

Stel: $\begin{cases} x = x(u_1,u_2,u_3) \\ y = y(u_1,u_2,u_3) \\ z = z(u_1,u_2,u_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_1(x,y,z) \\ u_2 = u_2(x,y,z) \\ u_3 = u_3(x,y,z) \end{cases}$

De coördinaten (u_1, u_2, u_3) van een punt P heten de **kromlijnige coördinaten** van P. De oppervlakken $u_1 = c_1, u_2 = c_2$ en $u_3 = c_3$ met c_1, c_2 en c_3 constant heten **coördinaatoppervlakken** waarbij elke 2 paar elkaar snijden in coördinaatkrommen. Als deze elkaar loodrecht snijden, dan hete het kromlijnig coördinatenstelsel **orthogonaal**. Stel: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ is de positievector van een punt $P \rightarrow \vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$
Een raakvector aan de kromme u_1 in P is dan $\partial\vec{r}/\partial u_1 \rightarrow$ de eenheidsraakvector $\vec{e}_1$ is dan:

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\Big/\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\right|$$

Stel: $h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\right| \rightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1} = h_1\vec{e}_1$, analoog voor $\vec{e}_2$ en $\vec{e}_3$ rakend aan u_2 resp. u_3:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2} = h_2\vec{e}_2 \text{ en } \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3} = h_3\vec{e}_3$$

Daar $\nabla u_1 \perp u_1 = c_1$, geldt voor de eenheidsnormaalvector $\vec{E}_1$ op het oppervlak $u_1 - c_1$:

$\vec{E}_1 = \frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|}$; analoog voor $\vec{E}_2$ en $\vec{E}_3$: $\vec{E}_2 = \frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|}$ en $\vec{E}_3 = \frac{\nabla u_3}{|\nabla u_3|}$

Voor een orthogonaal kromlijnig coördinatenstelsel geldt: $\vec{e}_n = \vec{E}_n \mid n = 1, 2, 3$

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) \rightarrow d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3 = h_1du_1\vec{e}_1 + h_2du_2\vec{e}_2 + h_3du_3\vec{e}_3$$

Voor orthogonale stelsels geldt: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$; het kwadraat van het lijnelement $ds = (d\vec{r} \cdot d\vec{r})^{1/2}$ is dan:

$$\boxed{ds^2 = h_1du_1^2 + h_2du_2^2 + h_3du_3^2}$$

Voor het volume-element dV geldt dan: $dV = |(h_1du_1\vec{e}_1) \cdot (h_2du_2\vec{e}_2) \cdot (h_3du_3\vec{e}_3)| \rightarrow$

$$\boxed{dV = h_1h_2h_3du_1du_2du_3}$$

In cylindrische coördinaten geldt: $x = \rho\cos\phi \ \wedge \ y = \rho\sin\phi \ \wedge \ z = z \rightarrow$

$$\begin{cases} dx = d\rho\cos\phi - \rho\sin\phi d\phi \\ dy = d\rho\sin\phi + \rho\cos\phi d\phi \\ dz = dz \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2d\phi^2 + dz^2}$$

In bolcoördinaten geldt: $x = r\sin\theta\cos\phi \ \wedge \ y = r\sin\theta\sin\phi \ \wedge \ z = r\cos\theta \rightarrow$

$$\begin{cases} dx = dr\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta d\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy = dr\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta d\theta\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2}$$

In parabolisch cylindrische coördinaten geldt: $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \ \wedge \ y = uv \ \wedge \ z = z \rightarrow$

$$\begin{cases} dx = udu - vdv \\ dy = vdu + udv \\ dz = dz \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boxed{ds^2 = (u^2 + v^2)du^2 + (u^2 + v^2)dv^2 + dz^2}$$

In parabolische coördinaten geldt: $x = uv\cos\phi \ \wedge \ y = uv\sin\phi \ \wedge \ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} dx = du \cdot v\cos\phi + udv\cos\phi - uv\sin\phi d\phi \\ dy = du \cdot v\sin\phi + udv\sin\phi - uv\cos\phi d\phi \quad \longrightarrow \\ dz = udu - vdv \end{array}\right.$$

$$\boxed{ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) + u^2v^2d\phi^2}$$

In elliptisch cylindrische coördinaten geldt: $x = a\cosh u\cos v \ \wedge \ y = a\sinh u\sin v \ \wedge \ z = z \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} dx = a\sinh udu\cos v - a\cosh u\sin vdv \\ dy = a\cosh udu\sin v + a\sinh u\cos vdv \quad \longrightarrow \\ dz = dz \end{array}\right.$$

$$\boxed{ds^2 = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)(du^2 + dv^2) + dz^2}$$

De volume-elementen volgen uit vergelijking met $ds^2 = h_1du_1^2 + h_2du_2^2 + h_3du_3^2$ en de uitdrukking in de resp. coördinatenstelsels. Substitutie in dV geeft dan:

cylindrisch:	$dV = \rho d\rho d\phi dz$
bolvormig:	$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$
parabolisch cylindrisch:	$dV = (u^2 + v^2)dudvdz$
parabolisch:	$dV = uv(u^2 + v^2)dudvd\phi$
elliptisch cylindrisch:	$dV = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)dudvdz$

Stel: $\nabla\Phi = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2 + f_3\vec{e}_3 \rightarrow$

$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{r} = (f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2 + f_3\vec{e}_3) \cdot (h_1du_1\vec{e}_1 + h_2du_2\vec{e}_2 + h_3du_3\vec{e}_3) \Leftrightarrow$

$d\Phi = h_1f_1du_1 + h_2f_2du_2 + h_3f_3du_3$

Tevens geldt: $d\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1}du_1 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2}du_2 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_3}du_3 \Leftrightarrow$

$f_1 = \dfrac{1}{h_1} \cdot \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} \ \wedge \ f_2 = \dfrac{1}{h_2} \cdot \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} \ \wedge \ f_3 = \dfrac{1}{h_3} \cdot \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_3} \rightarrow$

Gradiënt in orthogonale kromlijnige coördinaten:

$$\boxed{\nabla\Phi = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\vec{e}_3}$$

Stel: $\Phi = u_n \rightarrow \nabla u_n = \dfrac{\vec{e}_n}{h_n} \,\Big|\, n = 1,2,3 \rightarrow \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \dfrac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{h_2h_3} = \dfrac{\vec{e}_1}{h_2h_3} \rightarrow$

$\vec{e}_1 = h_2h_3\nabla u_2 \times \nabla u_3$; analoog geldt: $\vec{e}_2 = h_3h_1\nabla u_3 \times \nabla u_1$ en $\vec{e}_3 = h_1h_2\nabla u_1 \times \nabla u_2$

$\nabla \cdot (A_1\vec{e}_1) = \nabla \cdot (A_1h_2h_3\nabla u_2 \times u_3) = \nabla(A_1h_2h_3) \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_1h_2h_3\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \Leftrightarrow$

$\nabla \cdot (A_1\vec{e}_1) = \nabla(A_1h_2h_3) \cdot \dfrac{\vec{e}_2}{h_2} \times \dfrac{\vec{e}_3}{h_3} \Leftrightarrow$

$\nabla \cdot (A_1\vec{e}_1) = \left\{\dfrac{1}{h_1} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \dfrac{1}{h_2} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \dfrac{1}{h_3} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_3}\vec{e}_3\right\} \cdot \dfrac{\vec{e}_1}{h_2h_3} \Leftrightarrow$

$\nabla \cdot (A_1\vec{e}_1) = \dfrac{1}{h_1h_2h_3} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1}$

Analoog voor $\nabla \cdot (A_2\vec{e}_2)$ en $\nabla \cdot (A_3\vec{e}_3) \rightarrow$

Divergentie in orthogonale kromlijnige coördinaten:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial(h_2h_3A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_3h_1A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1h_2A_3)}{\partial u_3}\right\}}$$

$\nabla \times (A_1\vec{e}_1) = \nabla \times (A_1h_1\nabla u_1) = \nabla(A_1h_1) \times \nabla u_1 + A_1h_1\nabla \times \nabla u_1 = \nabla(A_1h_1) \times \dfrac{\vec{e}_1}{h_1} \Leftrightarrow$

$\nabla \times (A_1\vec{e}_1) = \left\{\dfrac{1}{h_1} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \dfrac{1}{h_2} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \dfrac{1}{h_3} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}\vec{e}_3\right\} \times \dfrac{\vec{e}_1}{h_1} \Leftrightarrow$

$\nabla \times (A_1\vec{e}_1) = \dfrac{1}{h_3h_1} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}\vec{e}_2 - \dfrac{1}{h_1h_2} \cdot \dfrac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\vec{e}_3$; analoog voor $\nabla \times (A_2\vec{e}_2)$ en $\nabla \times (A_3\vec{e}_3) \rightarrow$

Rotatie in orthogonale kromlijnige coördinaten:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = {} & \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right\}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right\}\vec{e}_2 + \\ & \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right\}\vec{e}_3\end{aligned}}$$

In determinantvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}}$$

<u>Stel</u>: $\vec{A} = \nabla\psi \rightarrow A_1 = \dfrac{1}{h_1} \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} \;\wedge\; A_2 = \dfrac{1}{h_2} \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} \;\wedge\; A_3 = \dfrac{1}{h_3} \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial u_3}$

$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot \vec{A}$; substitutie van A_1, A_2 en A_3 in de uitdrukkingen voor $\nabla \cdot \vec{A}$ geeft de

Laplaciaan in orthogonale kromlijnige coördinaten:

$$\boxed{\nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right\}}$$

In cylindrische coördinaten geldt:
$(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \phi, z) \ \wedge \ (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z) \ \wedge \ (h_1, h_2, h_3) = (1, \rho, 1)$
Substitutie in de nabla-uitdrukkingen geeft:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z \\
&\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right\} \\
&\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\left\{\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right\}\vec{e}_\rho + \left\{\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right\}\vec{e}_\phi + \left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right\}\vec{e}_z\right] \\
&\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}
\end{aligned}}$$

In bolcoördinaten geldt:
$(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \phi) \ \wedge \ (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi) \ \wedge \ (h_1, h_2, h_3) = (1, r, r\sin\theta)$
Substitutie in de nabla-uitdrukkingen geeft:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \\
&\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right\} \\
&\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\theta)\right\}\vec{e}_r + \left\{\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\phi)\right\}r\vec{e}_\theta +\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}r\sin\theta\vec{e}_\phi\right] \\
&\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}
\end{aligned}}$$

In parabolisch cylindrische coördinaten geldt:
$(u_1, u_2, u_3) = (u, v, z) \ \wedge \ (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z) \ \wedge \ (h_1, h_2, h_3) = (\sqrt{u^2+v^2}, \sqrt{u^2+v^2}, 1)$
Substitutie in de nabla-uitdrukkingen geeft:

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}A_v)\right\} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\Bigg[&\left\{\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{u^2+v^2}A_v)\right\}\sqrt{u^2+v^2}\vec{e}_u + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{u^2+v^2}A_u) - \frac{\partial A_z}{\partial u}\right\}\sqrt{u^2+v^2}\vec{e}_v + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}A_u)\right\}\vec{e}_z\Bigg]\end{aligned}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

In parabolische coördinaten geldt:
$(u_1,u_2,u_3) = (u,v,\phi) \ \wedge \ (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = (\vec{e}_u,\vec{e}_v,\vec{e}_\phi) \ \wedge \ (h_1,h_2,h_3) = (\sqrt{u^2+v^2},\sqrt{u^2+v^2},uv)$
Substitutie in de nabla-uitdrukkingen geeft:

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{uv} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial}{\partial u}(uv\sqrt{u^2+v^2}A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(uv\sqrt{u^2+v^2}A_v) + \frac{\partial}{\partial\phi}\{(u^2+v^2)A_\phi\}\right]$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} = &\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(uvA_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}(\sqrt{u^2+v^2}A_v)\right\}\vec{e}_u + \\ &\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}(\sqrt{u^2+v^2}A_u) - \frac{\partial}{\partial u}(uvA_\phi)\right\}\vec{e}_v + \\ &\frac{1}{u^2+v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}A_u)\right\}\vec{e}_\phi\end{aligned}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u^2+v^2}\left\{\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{u^2+v^2}{u^2v^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right\}$$

In ellpitisch cylindrische coördinaten geldt:
$(u_1,u_2,u_3) = (u,v,z) \ \wedge \ (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = (\vec{e}_u,\vec{e}_v,\vec{e}_z) \ \wedge$
$(h_1,h_2,h_3) = (a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, q\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, 1)$
Substitutie in de nabla-uitdrukkingen geeft:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\nabla\Phi = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z \\
&\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}A_u) + \right. \\
&\qquad\qquad\left.\frac{\partial}{\partial v}(a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}A_v) + a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)\frac{\partial A_z}{\partial z}\right\} \\
&\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\left\{\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}(a\sqrt{\sinh^2 + \sin^2 v}A_v)\right\}\vec{e}_u + \\
&\qquad\frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(a\sqrt{\sinh^2 + \sin^2 v}A_u) - \frac{\partial A_z}{\partial u}\right\}\vec{e}_v + \\
&\qquad\frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(a\sqrt{\sinh^2 + \sin^2 v}A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a\sqrt{\sinh^2 + \sin^2 v}A_u)\right\}\vec{e}_z \\
&\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right\}
\end{aligned}}$$

Als $\vec{f}$ een afbeelding is van de verz. vectoren V in E naar F, dan hoort bij elke vector $\vec{x} \in V$ een vector $\vec{f}(\vec{x}) \in F$; $\vec{f}$ is dan een **vectorfunctie van een vectorvariabele**.
Als $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \mid n \in I\!N^+$ een basis is in E en $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + n_n\vec{e}_n$, dan is $\vec{f}(\vec{x})$ te schrijven als $\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$ en stelt een vectorwaarde functie van $x_1, \ldots, x_n$ voor.
Als $(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m) \mid m \in I\!N^+$ een basis is in F, dan is $\vec{f}(\vec{x})$ te schrijven als:

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = f_1(\vec{x})\vec{g}_1 + \cdots + f_m(\vec{x})\vec{g}_m}$$

De componenten van $\vec{f}$ t.o.v. $(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m)$ zijn hierin reële waarde functies.

Een vectorfunctie $\vec{f}$ in E naar F is **lineair** als geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{f}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}(\vec{b}) \\ \vec{f}(k\vec{a}) = k\vec{f}(\vec{a}) \mid k \in I\!R \end{array}}$$

Er geldt dan: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\vec{f}(\vec{e}_1) + \cdots x_n\vec{f}(\vec{e}_n)$

<u>Stel</u>: $\left\{\begin{array}{l} \vec{f}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{g}_1 + a_{21}\vec{g}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{g}_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{f}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{g}_1 + a_{2n}\vec{g}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{g}_m \end{array}\right. \quad \rightarrow$

$\vec{f}(\vec{x}) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{g}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\vec{g}_m$
De componenten van een lineaire functie $\vec{f}(\vec{x})$ zijn dus reële waarde lineaire functies van $(x_1, \ldots, x_n)$. Uit $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{f}(\vec{0} - \vec{0}) = \vec{f}(\vec{0}) - \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ volgt dat als $\vec{f}$ een lineaire afbeelding is van E naar F, dat dan de oorsprong in E steeds wordt afgebeeld op de oorsprong in F.

Als $\vec{x}_0 \in V$ en $\vec{u}_0 \in E$, dan wordt de **richtingsafgeleide** $D_{\vec{u}_0}$ van $\vec{f}$ in de richting van $\vec{u}_0$ gedefinieerd als:

$$\boxed{D_{\vec{u}_0}\vec{f}(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + h\vec{u}_0) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{h}}$$

De partiële afgeleide $D_{\vec{e}_k}$ van $\vec{f}$ naar de k-de component van $\vec{x}$ wordt gedefinieerd als de afgeleide in de richting van een basisvector $\vec{e}_k$ van $\vec{x}$:

$$D_{\vec{e}_k}\vec{f}(\vec{x}) \equiv D_k\vec{f} \equiv \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(\vec{x}+h\vec{e}_k)-\vec{f}(\vec{x})}{h} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_n)-\vec{f}(x_1,\ldots,x_n)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_n)-f_1(x_1,\ldots,x_n)}{h}\vec{g}_1 + \cdots +$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_m(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_n)-f_m(x_1,\ldots,x_n)}{h}\vec{g}_m \to$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} = \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\vec{g}_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_k}\vec{g}_m}$$

Voor de **differentiaal** $d\vec{f}$ van een lineaire vectorfunctie $\vec{f}(\vec{v})$ geldt:
$d\vec{f}(\vec{v}) = d\vec{f}(v_1\vec{e}_1 + \cdots + n_n\vec{e}_n) = v_1 d\vec{f}(\vec{e}_1) + \cdots + v_n d\vec{f}(\vec{e}_n) = v_1 D_{\vec{e}_1}\vec{f} + \cdots + v_n D_{\vec{e}_n}\vec{f} \to$

$$\boxed{d\vec{f}(\vec{v}) = v_1\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} + \cdots + v_n\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}}$$

Daar de differentialen $dx_1,\ldots,dx_n$ van $x_1(\vec{x}) = x_1,\ldots,x_n(\vec{x}) = x_n$ voldoen aan
$d\vec{f}(\vec{v}) = dx_1(\vec{v})\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} + \cdots + dx_n(\vec{v})\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} \to$

$$\boxed{d\vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}dx_n}$$

Als $\vec{f}$ en $\vec{g}$ vectorfuncties van een vectorvariabele zijn, dan geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} d(\vec{f}\pm\vec{g}) = d\vec{f} \pm d\vec{g} \\ dh\vec{f} = hd\vec{f} + (dh)\vec{f} \mid h \in I\!R \\ d(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \vec{f}\cdot d\vec{g} + (d\vec{f})\cdot\vec{g} \\ d(\vec{f}\times\vec{g}) = \vec{f}\times d\vec{g} + (d\vec{f})\times\vec{g} \end{array}}$$

Als $\vec{f}$ een vectorfunctie van E naar F is en $\vec{g}$ een vectorfunctie van F naar G, dan is $\vec{h} = \vec{g}\circ\vec{f}$ een samengestelde vectorfunctie van E naar G.

<u>Stel</u>: $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \wedge\ \vec{z} = \vec{g}(\vec{y}) = \begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_r = b_{r1}y_1 + \cdots + b_{rm}y_m \end{cases} \to$

$y_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \mid k = 1,\ldots,m\ \wedge\ z_i = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}y_k \mid i = 1,\ldots,r \to$

Componenten van $\vec{z} = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) : z_i = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right) \rightarrow$

$$\boxed{z_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \right) \Bigg| \; i = 1, \ldots, r}$$

Als (a_{ij}) de matrixvoorstelling van $\vec{f}$ is en (b_{ij}) die van $\vec{g}$, dan is $(c_{ij}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \right)$ de matrixvoorstelling van $\vec{h}$, met $(c_{ij}) = (b_{ij})(a_{ij})$.

<u>Stel</u>: $\vec{h} = h_1 \vec{e}_1 + \cdots + h_r \vec{e}_r \rightarrow \dfrac{\partial \vec{h}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial h_1}{\partial x_j} \vec{e}_1 + \cdots + \dfrac{\partial h_r}{\partial x_j} \vec{e}_r$

Substitutie van $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g_i}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \dfrac{\partial g_i}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j} \; \Bigg| \; i = 1, \ldots, r \wedge j = 1, \ldots, n$ geeft:

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) \vec{e}_1 + \cdots + \left(\frac{\partial g_r}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) \vec{e}_r \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1} \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_1} \vec{e}_r \right) \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_m} \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_m} \vec{e}_r \right) \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \rightarrow$$

<u>**Kettingregel**</u>:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j}}$$

Uit $D_{\vec{e}_i} \vec{f} = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \vec{g}_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \vec{g}_m$ volgt voor de 2-de afgeleide in de richting van $\vec{e}_j$:

$$D^2_{\vec{e}_j \vec{e}_i} \vec{f} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_i} \vec{g}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_i} \vec{g}_m$$

Analoge uitdrukkingen gelden voor hogere orde afgeleiden.

Uit $D_{\vec{u}} \vec{f} = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} u_n$ volgt voor de 2-de afgeleide in de richting van $\vec{v}$:

$$D^2_{\vec{v}\vec{u}} \vec{f} = D_{\vec{v}}(D_{\vec{u}} \vec{f}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} D_{\vec{u}} \vec{f} \right) v_1 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} D_{\vec{u}} \vec{f} \right) v_n \Leftrightarrow$$

$$D^2_{\vec{v}\vec{u}} \vec{f} = \left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_1^2} u_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_1 \partial x_n} u_n \right) v_1 + \cdots + \left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_n \partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_n^2} u_n \right) v_n$$

Analoge uitdrukkingen gelden voor hogere orde afgeleiden.

Tensoranalyse

Stel: S_N is een hyperruimte met punten $P(x^r)$ en $Q(x^r + dx^r) \mid r = 1, 2, \ldots, N \to P$ en Q definieren een infinitesimale vector $\vec{PQ}$ met componenten dx^r

Als in een ander coördinatenstelsel de componenten $d\overline{x}^r$ zijn, geldt: $d\overline{x}^r = \dfrac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s} dx^s$

Een stel grootheden T^r verbonden met een punt P heten **componenten van een contravariante vector** als ze bij een coördinatenovergang transformeren volgens:

$$\boxed{\overline{T}^r = T^s \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s}}$$

Een contravariante vector is een **contravariante tensor** van de eerste orde.
Analoog vormen de grootheden T^{rs} de componenten van een contravariante tensor van de tweede orde als ze transformeren volgens:

$$\boxed{\overline{T}^{rs} = T^{mn} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^n}}$$

Algemeen geldt voor de componenten van een contravariante tensor van de p-de orde:

$$\boxed{\overline{T}^{r_1 \cdots r_p} = T^{s_1 \cdots s_p} \frac{\partial \overline{x}_1^r}{\partial x_1^s} \cdots \frac{\partial \overline{x}_p^r}{\partial x_p^s}}$$

Een scalar is een tensor van de nulde orde:

$$\boxed{\overline{T} = T}$$

Dit is een **invariant**, d.w.z. de waarde is onafhankelijk van het gebruikte coördinatenstelsel.
Stel: ϕ is een invariante functie die aan elk punt $(x^1, \ldots, x^N)$ van S_N een invariant $\phi(x^1, \ldots, x^N)$ toekent $\to \dfrac{\partial \phi}{\partial \overline{x}^r} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x^s} \cdot \dfrac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} \to$

Een stel grootheden T_r verbonden met een punt P heten de **componenten van een covariante vector** als ze bij een coördinatenovergang transformeren volgens:

$$\boxed{\overline{T}_r = T_s \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^s}}$$

Een covariante vector is een **covariante tensor** van de eerste orde.
Analoog vormen de grootheden T_{rs} de componenten van een covariante tensor van de tweede orde als ze transformeren volgens:

$$\boxed{\overline{T}_{rs} = T_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^r} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^s}}$$

Algemeen geldt voor de componenten van een covariante tensor van de q-de orde:

$$\boxed{\overline{T}_{u_1 \cdots u_q} = T_{v_1 \cdots v_q} \frac{\partial x^{v_1}}{\partial \overline{x}^{u_1}} \cdots \frac{\partial x^{v_q}}{\partial \overline{x}^{u_q}}}$$

Een stel grootheden $T^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q}$ verbonden met een punt P heten de **componenten van een gemengde tensor** van de orde $(p+q)$ als ze bij een coördinatenovergang transformeren volgens:

$$\boxed{\overline{T}^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q} = T^{s_1\cdots s_p}{}_{v_1\cdots v_q}\frac{\partial\overline{x}^{r_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{r_p}}{\partial x^{s_p}}\cdot\frac{\partial x^{v_1}}{\partial\overline{x}^{u_1}}\cdots\frac{\partial x^{v_q}}{\partial\overline{x}^{u_q}}}$$

De **Kronecker delta** $\delta^r{}_s$ wordt gedefinieerd als: $\delta^r{}_s = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{voor } r=s \\ 0 & \text{voor } r\neq s\end{array}\right. \rightarrow$

$\delta^r{}_s = \dfrac{\partial\overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\dfrac{\partial x^m}{\partial\overline{x}^s} = \dfrac{\partial\overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\dfrac{\partial x^m}{\partial x^n}\cdot\dfrac{\partial x^n}{\partial\overline{x}^s} = \delta^m{}_n\dfrac{\partial\overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\dfrac{\partial x^n}{\partial\overline{x}^s}$; $\delta^m{}_n$ is dus een gemengde 2-de orde tensor.

$\delta^r{}_r = \delta^1{}_1 + \cdots + \delta^N{}_N = 1 + \cdots + 1 \rightarrow$

$$\boxed{\delta^r{}_r = N}$$

Een tensorvergelijking is een vergelijking waarvan het linkerlid een tensor is en het rechterlid nul. Daar de transformatievergelijkingen voor een tensor lineair en homogeen zijn, blijft een tensorvergelijking dezelfde onder een transformatie van een coördinatenstelsel I naar een coördinatenstelsel II.
Tensoren van hetzelfde type kunnen worden opgeteld en afgetrokken door hun overeenkomstige componenten op te tellen resp. af te trekken:

$$\boxed{D^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q} = A^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q} + B^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q} - C^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q}}$$

Een 2-de orde tensor A_{rs} is **symmetrisch** in een paar indices als $A_{rs} = A_{sr}$ en **anti(scheef) symmetrisch** als $A_{rs} = -A_{sr}$.
Een contra- of covariante tensor blijft (anti) symmetrisch onder een coördinatentransformatie; dit geldt niet voor gemengde tensors.
Elke 2-de orde symmetrische tensor A^{rs} is te schrijven als:

$$\boxed{A^{rs} = \tfrac{1}{2}(A^{rs} + A^{sr}) + \tfrac{1}{2}(A^{rs} - A^{sr})}$$

Het **uitwendig produkt** van 2 tensoren wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{A^{r_1\cdots r_p}{}_{u_1\cdots u_q}B^{s_1\cdots s_m}{}_{v_1\cdots v_n} = C^{r_1\cdots r_p s_1\cdots s_m}{}_{u_1\cdots u_q v_1\cdots v_n}}$$

De **contractie** van een gemengde tensor wordt gedefinieerd als het gelijkstellen van een bovenindex aan een onderindex, hetgeen de orde van de tensor met een factor 2 vergaagt.
Het **inwendig produkt** van 2 tensoren wordt gedefinieerd als een contractie toegepast op een uitwendig produkt; dit kan op meerdere manieren.
Zo geldt voor $A_{rs}B^m{}_n = A_{ms}B^m{}_n = C_{sn}$ of $A_{rs}B^m{}_n = A_{rm}B^m{}_n = D_{rn}$
Stel: A^{rs} is antisymmetrisch en B_{rs} is symmetrisch $\rightarrow$
$A^{rs}B_{rs} = -A^{sr}B_{rs} = -A^{sr}B_{sr} = -A^{rs}B_{rs} \rightarrow 2A^{rs}B_{rs} = 0 \rightarrow A^{rs}B_{rs} = 0$

De **toegevoegde metrische tensor** g^{mn} van g_{mn} wordt gedefinieerd als:

$g_{mr}g^{mn} = g_{rm}g^{nm} = \delta^n{}_r$; g^{mn} is dus een 2-de orde contravariante tensor.

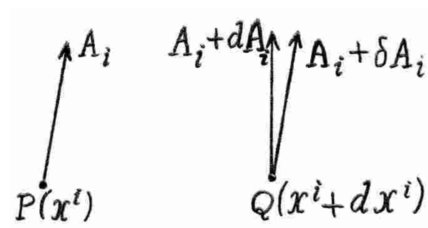
Dit is equivalent met $g^{mn} = \dfrac{\Delta^{mn}}{g}$ met $g = |g_{mn}|$ en Δ^{mn} de cofactor van $|g^{mn}|$

Er geldt: $\dfrac{\partial \ln|g|}{\partial x^r} = \dfrac{\partial \ln|g|}{\partial g_{mn}} \cdot \dfrac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} = g^{mn}\dfrac{\partial g_{mn}}{\partial x^r}$

Stel: vectoren $A_i \in P(x^i) \wedge (A_i + dA_i) \in Q(x^i + dx^i) \to (A_i + dA_i) - A_i = dA_i = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}dx^j$

Stel: $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j} = A_{i,j} \to dA_i = A_{i,j}dx^j$; dit is i.h.a. geen tensor, daar $A_{i,j}$ geen tensor is.

Bij **parallelverplaatsing** in R_N van een covariante vector wordt A_i verplaatst naar punt Q zonder dat de grootte en richting van A_i veranderen; de componenten van deze verplaatste vector $A_i+\delta A_i$zijn in R_N niet gelijk aan de componenten van A_i (dit is wèl het geval in E_N).



De verschilvector wordt nu gedefinieerd als:
$(A_i + dA_i) - (A_i + \delta A_i) = dA_i - \delta A_i = A_{i;j}dx^j$, met $A_{i;j}$ de covariante afgeleide van A_i.
Stel: in E_N zijn A_i de componenten van een vectorveld t.o.v. willekeurige kromlijnige coördinaten x^i en B_j de componenten t.o.v. orthonormale coördinaten $y^j \to$

$$A_i = \frac{\partial y^i}{\partial x^i}B_j \ \wedge \ B_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}A_i$$

Hieruit volgt voor de parallelle verplaatsing van A_i: $\delta A_i = \dfrac{\partial^2 y^i}{\partial x^i \partial x^k}dx^k B_j \ \wedge \ \delta B_j = 0 \to$

$$\delta A_i = \left(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^i \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right) A_l dx^k$$

Een **affiniteit** ofwel **affiene verbinding** ofwel **samenhangfactor** Γ^l_{ik} tussen de punten van de ruimte wordt nu gdefinieerd als:

$$\boxed{\Gamma^l_{ik} = \left(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^i \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right)}$$

De definitievergelijking voor parallelle verplaatsing in R_N wordt dan:

$$\boxed{\delta A_i = \Gamma^l_{ik} A_l dx^k}$$

$$dA_i - \delta A_i = A_{i;j}dx^j = \frac{\partial A_i}{\partial x^j}dx^j - \Gamma^k_{ij}A_k dx^j = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}A_k\right)dx^j \to$$

$$\boxed{A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma^k_{ij}A_k = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}A_k}$$

Hieruit volgt: $\Gamma^k_{ij} = 0 \Rightarrow A_{i;j} \equiv A_{i,j}$
Een tensorvergelijking die in alle coördinatenstelsels geldt bevat uitsluitend covariante afgeleiden, daar i.h.a. niet alle N^3 componenten van Γ^k_{ij} nul zullen zijn.

$\overline{A}_{i;j} = \dfrac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} - \overline{\Gamma}^k_{ij}\overline{A}_k$; substitutie van $\overline{A}_i = \dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}A_r$ en $\overline{A}_{i;j} = \dfrac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \cdot \dfrac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}A_{s;t}$ geeft:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}A_{s;t} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i} \cdot \frac{\partial x^u}{\partial \overline{x}^j} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial x^u} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j}A_r - \overline{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}A_r$$

Substitutie van $A_{s;t} = \dfrac{\partial A_s}{\partial x^t} - \Gamma^r_{st} A_r$ en vervolgens verwisselen van dummies geeft:

$\overline{\Gamma}^k_{ij} \dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} = \dfrac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \cdot \dfrac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^r_{st} + \dfrac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j}$

Vermenigvuldigen met $\dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r}$ geeft, samen met $\dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \cdot \dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} = \dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial \overline{x}^k} = \overline{\delta}^l{}_k$, de **transformatie-vergelijking voor een affiniteit**:

$$\boxed{\overline{\Gamma}^l_{ij} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^r_{st} + \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j}}$$

$\overline{\Gamma}^l_{ij}$ transformeert dus niet als een tensor, waaruit volgt dat als alle componenten van Γ^l_{ij} nul zijn in het ene coördinatenstelsel, deze niet nul hoeven te zijn in een ander stelsel (Het verschil van twee affiniteiten is wel een tensor).
In het algemeen geldt dat $\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}$; echter, als Γ symmetrisch is in i en j in een coördinatenstelsel, dan is ze ook symmetrisch in elk ander stelsel.
Voor een scalar ϕ geldt onder een parallelle verplaatsing in elk coördinatenstelsel: $\delta\phi = 0 \rightarrow$
$d\phi - \delta\phi = d\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i \rightarrow$

$$\boxed{\phi_{;i} = \phi_{,i}}$$

$A_k B^k$ is een invariant $\rightarrow \delta(A_k B^k) = 0 \Leftrightarrow A_k \delta B^k = -B^k \delta A_k = -\Gamma^k_{ij} A_k B^i dx^j \rightarrow$
Parallelle verplaatsing van een contravariante vector:

$$\boxed{\delta B^k = -\Gamma^k_{ij} B^i dx^j}$$

Analoog aan het bovenstaande volgt dan voor de covariante afgeleide van B^i:

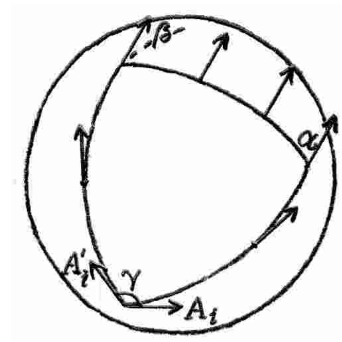
$$\boxed{B^k{}_{;j} = B^k{}_{,j} + \Gamma^k_{ij} B^i = \frac{\partial B^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} B^i}$$

$A^i{}_j B_i C^j$ is een invariant $\rightarrow \delta(A^i{}_j B_i C^j) = 0 \Leftrightarrow B_i C^j \delta A^i{}_j + A^i{}_j \delta B_i C^j + A^i{}_j B_i \delta C^j = 0 \Leftrightarrow$
$\delta A^i{}_j = \Gamma^l_{ij} A^i{}_l dx^k - \Gamma^i_{lk} A^l{}_j dx^k \rightarrow$
Covariante afgeleide van een gemengde tensor:

$$\boxed{A^i{}_{j;k} = \frac{\partial A^i{}_j}{\partial x^k} - \Gamma^l_{jk} A^i{}_l + \Gamma^i_{lk} A^l{}_j}$$

Algemeen geldt voor de covariante afgeleide van een willekeurige tensor A dat deze de algebraïsche som is van de partiële afgeleiden en een stel termen, één voor elke index; deze bestaan uit ΓA met steeds als boven(onder) index een contravariante(covariante) index in Γ en een dummie in A die tevens als onder(boven) index optreedt. De resterende index in Γ is de afleidingsindex. De overige indices van A blijven behouden. De covariante termen krijgen een minteken.

Parallelverplaatsing van een vector A_i langs een gesloten pad van 3 cirkelbogen geeft aan het eind i.h.a. een $\angle(A_i, A_i') \neq 0$. Daar A_i steeds op elke cirkelboog dezelfde hoek maakt met de raaklijn aan de cirkelboog, is $dA_i - \delta A_i = 0 \rightarrow A_{i;j} = 0$ Als de 3 cirkelbogen infinitesimaal zijn, dan geldt voor de totale variatie ΔA_i van A_i over het hele pad:



$\Delta A_i = \oint \delta A_i = \oint \Gamma^n_{il} A_n dx^l \rightarrow$

Voor de waarde van A_i binnen het pad geldt:

$\delta A_i \approx \Gamma^n_{il} A_n dx^l \Leftrightarrow \dfrac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$

Volgens het Theorema van Stokes geldt: $\displaystyle\oint A_i dx^i = \iint \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dS^{ki}$

Hierin is dS^{ki} een antisymmetrische tensor met componenten die de projecties zijn van het oppervlakte-element op de coördinaatvlakken $\rightarrow$

$$\iint \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dS^{ki} = \tfrac{1}{2} \iint \frac{\partial A_k}{\partial x^i} dS^{ik} + \tfrac{1}{2} \iint \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dS^{ki} = \tfrac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) dS^{ik} \rightarrow$$

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l = \tfrac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma^i_{km} A_i) - \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma^i_{kl} A_i) \right] dS^{lm}$$

Bij integratie over een infinitesimaal gebied kan de term tussen de rechte haken als constant genomen worden $\rightarrow$

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma^i_{km} A_i) - \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma^i_{kl} A_i) \right) \Delta S^{lm} \Leftrightarrow$$

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i + \Gamma^i_{km} \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i - \Gamma^i_{kl} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right) \Delta S^{lm} \Leftrightarrow$$

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km} \Gamma^n_{il} A_n - \Gamma^i_{kl} \Gamma^n_{im} A_n \right) \Delta S^{lm}$$

$$\Gamma^i_{km} \Gamma^n_{il} A_n - \Gamma^i_{kl} \Gamma^n_{im} A_n = \Gamma^i_{km} \Gamma^i_{il} A_i - \Gamma^i_{kl} \Gamma^i_{im} A_i = \Gamma^n_{km} \Gamma^i_{nl} A_i - \Gamma^n_{kl} \Gamma^i_{nm} A_i \rightarrow$$

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2} \left(Q\Gamma^i_{km} x^l - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} \right) A_i \Delta S^{lm}$$

De **Riemann-Christoffel-krommingstensor** $R^i{}_{klm}$ wordt nu gedefinieerd als:

$$\boxed{R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}}$$

De verandering ΔA_k van A_k in een punt bij een parallelverplaatsing over een infinitesimaal gesloten pad is dus evenredig met A_i, het oppervlak ΔS^{lm} en de intrinsieke kromming $R^i{}_{klm}$:

$$\boxed{\Delta A_k = \tfrac{1}{2} R^i{}_{klm} \Delta S^{lm} A_i}$$

$\Delta(A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \tfrac{1}{2} A^k R^i{}_{klm} \Delta S^{lm} B_i + B_k \Delta A^k \Leftrightarrow$

$\Delta(A^k B_k) = \tfrac{1}{2} A^i B_k R^i{}_{klm} \Delta S^{lm} + B_k \Delta A^k = B_k (\tfrac{1}{2} A^i R^k{}_{ilm} \Delta S^{lm} + \Delta A^k) = 0 \rightarrow$

$$\boxed{\Delta A^k = -\tfrac{1}{2} R^k{}_{ilm} \Delta S^{lm} A^i}$$

$A_{i;k} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} A_j \to A_{i;kl} = \dfrac{\partial A_{i;k}}{\partial x^l} - \Gamma^r_{il} A_{r;k} - \Gamma^r_{kl} A_{i;r} \wedge A_{i;lk} = \dfrac{\partial A_{i;l}}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik} A_{r;l} - \Gamma^r_{lk} A_{i;r} \to$

$A_{i;kl} - A_{i;lk} = \dfrac{\partial A_{i;k}}{\partial x^l} - \dfrac{\partial A_{i;l}}{\partial x^k} \Gamma^r_{il} A_{r;k} - \Gamma^r_{kl} A_{r;l} + \Gamma^r_{ik} A_{r;l} + \Gamma^r_{lk} A_{i;r}$

<u>Stel</u>: $\Gamma^r_{kl} = \Gamma^r_{lk} \to$

$A_{i;kl} - A_{i;lk} = \dfrac{\partial}{\partial x^l}\left\{\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}\right\} - \dfrac{\partial}{\partial x^l}\left\{\Gamma^j_{ik} A_j\right\} - \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left\{\dfrac{\partial A_i}{\partial x^l}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left\{\Gamma^j_{il} A_j\right\} - \Gamma^r_{il} A_{r;k} + \Gamma^r_{ik} A_{r;l} \Leftrightarrow$

$A_{i;kl} - A_{i;lk} = -\dfrac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial x^l} A_j - \Gamma^j_{ik} \dfrac{\partial A_j}{\partial x^l} + \dfrac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial x^k} A_j + \Gamma^j_{il} \dfrac{\partial A_j}{\partial x^k} - \Gamma^r_{il} \dfrac{\partial A_r}{\partial x^k} + \Gamma^r_{il}\Gamma^j_{rk} A_j + \Gamma^r_{ik} \dfrac{\partial A_r}{\partial x^l} -$
$\Gamma^r_{ik}\Gamma^j_{rl} A_j \Leftrightarrow$

$A_{i;kl} - A_{i;lk} = -\dfrac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial x^l} A_j + \dfrac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial x^k} A_j + \Gamma^r_{il}\Gamma^j_{rk} A_j - \Gamma^r_{ik}\Gamma^j_{rl} A_j \to$

$$\boxed{A_{i;kl} - A_{i;lk} = R^j{}_{ikl} A_j}$$

Analoog geldt:

$$\boxed{A^i_{;kl} - A^i_{;lk} = R^j{}_{mkl} A^m}$$

$A_{i;lk} - A_{i;kl} = R^j{}_{ilk} A_j \to A_{i;kl} - A_{i;lk} = -R^j_{ilk} A_j \to R$ is antisymmetrisch in k en l:

$$\boxed{R^j ikl = -R^j{}_{ilk}}$$

<u>Stel</u>: $x^i = \overline{x}^i + \frac{1}{2} a^i_{jk} \overline{x}^j \overline{x}^k \to \dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} = \dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial \overline{x}^j} + \frac{1}{2} a^i_{jk} \left\{\dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial \overline{x}^j} \overline{x}^k + \overline{x}^j \dfrac{\partial \overline{x}^k}{\partial \overline{x}^j}\right\} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} = \overline{\delta}^i{}_j + \frac{1}{2} a^i_{jk} (\overline{x}^k + \overline{x}^j \overline{\delta}^k{}_j) = \delta^i{}_j + \frac{1}{2} a^i_{jk} (\overline{x}^k + \overline{x}^k) = \delta^i{}_j + a^i_{jk} \overline{x}^k \to$

$\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} = a^i_{jk}$; voor een punt $P(x^i = 0)$ geldt: $\dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} = \delta^i{}_j$

$\dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} \cdot \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i{}_k \to \delta^i{}_k = \delta^i{}_j \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k} \to \dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} = \delta^i{}_k$

Substitutie in de transformatievergelijking voor $\overline{\Gamma}^l_{ij}$ geeft: $\overline{\Gamma}^l_{ij} = \delta^l{}_r \delta^s{}_i \delta^t{}_j \Gamma^r_{st} + \delta^l{}_r a^r_{ij} = \Gamma^l_{ij} + a^l_{ij}$

<u>Stel</u>: $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$; de coëfficiënten a^l_{ij} kunnen dan zo gekozen worden dat $a^l_{ij} = -\Gamma^l_{ij} \to$

$$\boxed{\overline{\Gamma}^l_{ij} = 0}$$

Als Γ symmetrisch is, dan bestaat er dus een coördinatenstelsel zo, dat alle componenten van Γ in een bepaald punt nul worden.Dergelijke coördinaten heten **geodetisch**; wegens $\overline{\Gamma}^l_{ij} = 0$ zijn de covariante en partiële afgeleiden dan gelijk ($A_{i;k} = [\partial A_i / \partial x^k] - \Gamma^j_{ik} A_j$).
Een tensorvergelijking geldig in een geodetisch stelsel is dus ook geldig in een willekeurig ander stelsel.

Voor de Riemann-Christoffel-krommingstensor geldt nu: $R^i{}_{klm} = \dfrac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \dfrac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} \to$

$R^s{}_{rmn;t} = \dfrac{\partial^2 \Gamma^s_{rn}}{\partial x^t \partial x^m} - \dfrac{\partial^2 \Gamma^s_{rm}}{\partial x^t \partial x^n} \to R^s{}_{rnt;m} = \dfrac{\partial^2 \Gamma^s_{rt}}{\partial x^m \partial x^n} - \dfrac{\partial^2 \Gamma^s_{rn}}{\partial x^m \partial x^t}$

$R^s{}_{rtm;n} = \dfrac{\partial^2 \Gamma^s_{rm}}{\partial x^n \partial x^t} - \dfrac{\partial^2 \Gamma^s_{rt}}{\partial x^n \partial x^m}$

Optelling van de 3 uitdrukkingen geeft de **Bianchi-identiteiten**:

$$\boxed{R^s{}_{rmn;t} + R^s{}_{rnt;m} + R^s{}_{rtm;n} = 0}$$

Stel: $j_{ij}(A^j{}_{;k}) = (g_{ij}A^j)_{;k} = g_{ij}(A^j{}_{;k}) + g_{ij;k}A^j \to g_{ij;k}A^j = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{g_{ij;k} = 0}$$

Hieruit volgt: $g_{ij;k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik} g_{ir} - \Gamma^r_{jk} g_{ir} = 0 \to g_{jk;i} = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ji} g_{rk} - \Gamma^r_{ki} g_{jr} = 0 \to$

$g_{ki;j} = \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^r_{kj} g_{ri} - \Gamma^r_{ij} g_{kr} = 0 \to$

$g_{jk;i} + g_{ki;j} - g_{ij;k} = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ji} g_{rk} - \Gamma^r_{ij} g_{kr} = 0 \Leftrightarrow g_{kr}\Gamma^r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$

Het **Christoffelsymbool van de 1e soort** $[ij,k]$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{[ij,k] = \Gamma_{ijk} = g_{kr}\Gamma^r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)}$$

$[kj,i] = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right) \to$

$$\boxed{[ij,k] + [kj,i] = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}}$$

Het **Christoffelsymbool van de 2e soort** $\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} = g^{sk}[ij,k] = g^{sk}\Gamma_{ijk} = \Gamma^s_{ij}}$$

$(g^{ij}g_{kj})_{;l} = \delta^i{}_{k;l} = 0 \ \wedge \ (g^{ij}g_{kj})_{;l} = g^{ij}{}_{;l}g_{kj} + g^{ij}(g_{kl;l}) = g^{ij}{}_{;l}g_{kj} \to g^{ij}{}_{;l}g_{kj} = 0 \to$

$$\boxed{g^{ij}{}_{;l} = 0}$$

Uit $g_{ps}R^p{}_{rmn} = R_{srmn}$ en $-g_{ps}R^p{}_{rmn} = g_{ps}R^p{}_{rnm} = R_{srnm}$ volgt:

$$\boxed{R_{srmn} = -R_{srnm}}$$

Tevens geldt:

$$\boxed{\begin{array}{c} R^s{}_{rmn} + R^s{}_{mnr} + R^s{}_{nrm} = 0 \\ R_{srmn} + R_{smnr} + R_{snrm} = 0 \end{array}}$$

$$R_{srmn} = g_{qs}R^q{}_{rmn} = g_{qs}\frac{\partial\Gamma^q_{rn}}{\partial x^m} - g_{qs}\frac{\partial\Gamma^q_{rm}}{\partial x^n} + g_{qs}\Gamma^q_{pm}\Gamma^p_{rn} - g_{qs}\Gamma^q_{pn}\Gamma^p_{rm} \Leftrightarrow$$

$$R_{srmn} = g_{qs}\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix} - g_{qs}\frac{\partial}{\partial x^n}\begin{Bmatrix} q \\ rm \end{Bmatrix} + g_{qs}\begin{Bmatrix} p \\ rn \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ pm \end{Bmatrix} - g_{qs}\begin{Bmatrix} p \\ rm \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ pn \end{Bmatrix}$$

$$g_{qs}\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left[g_{qs}\begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix}\right] - \begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{qs}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}[rn,s] - \begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{qs}}{\partial x^m} \rightarrow$$

$$R_{srmn} = \frac{\partial}{\partial x^m}[rn,s] - \frac{\partial}{\partial x^n}[rm,s] + \begin{Bmatrix} p \\ rn \end{Bmatrix}[pm,s] - \begin{Bmatrix} p \\ rm \end{Bmatrix}[pn,s] - \frac{\partial g_{qs}}{\partial x^m}\begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial x^n}\begin{Bmatrix} q \\ rm \end{Bmatrix}$$

Substitutie van de definitievergelijking van $[rn,s]$ en $[rm,s]$ en $\dfrac{\partial g_{qs}}{\partial x^n} = [sn,q] + [qn,s]$ geeft:

$$R_{srmn} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ns}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{rn}}{\partial x^s}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x^n}\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^s}\right)\right] + \begin{Bmatrix} p \\ rn \end{Bmatrix}[pm,s] -$$
$$\begin{Bmatrix} p \\ rm \end{Bmatrix}[pn,s] - \begin{Bmatrix} q \\ rn \end{Bmatrix}([sm,q] + [qm,s]) + \begin{Bmatrix} q \\ rm \end{Bmatrix}([sn,q] + [qn,s])$$

<u>Stel</u>: $q = p \rightarrow$

$$R_{srmn} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sn}}{\partial x^m \partial x^r} + \frac{\partial^2 g_{rm}}{\partial x^n \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{rn}}{\partial x^m \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{sm}}{\partial x^n \partial x^r}\right) + \begin{Bmatrix} p \\ rm \end{Bmatrix}[sn,p] - \begin{Bmatrix} p \\ rn \end{Bmatrix}[sm,p] \rightarrow$$

$$\boxed{R_{srmn} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sn}}{\partial x^m \partial x^r} + \frac{\partial^2 g_{rm}}{\partial x^n \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{rn}}{\partial x^m \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{sm}}{\partial x^n \partial x^r}\right) + g_{pq}\{[rm,q][sn,p] - [sm,p][rn,q]\}}$$

Verwisseling van s en r geeft:

$$\boxed{R_{srmn} = -R_{rsmn}}$$

Tevens geldt:

$$\boxed{R_{srmn;t} + R_{srnt;m} + R_{srtm;n} = 0}$$

In R_4 is het aantal componenten van R $4^4 = 256$; t.g.v. symmetrie in R is dit terug te brengen tot $\frac{1}{12}N^2(N^2-1)$ onafhankelijke componenten. Het aantal onafhankelijke componenten in R_4 is dus $\frac{1}{12}\cdot 16\cdot 15 = 20$.

$\begin{Bmatrix} n \\ rn \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{mn}\left(\dfrac{\partial g_{nm}}{\partial x^r} + \dfrac{\partial g_{mr}}{\partial x^n} - \dfrac{\partial g_{rn}}{\partial x^m}\right)$; verwisseling van n en m in de laatste term geeft:

$$\tfrac{1}{2}g^{nm}\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^r} = \frac{\partial}{\partial x^r}\ln|g|^{1/2} = |g|^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^r}|g|^{1/2}$$

$$\nabla\cdot T^n = T^n{}_{;n} = \frac{\partial T^n}{\partial x^n} + \begin{Bmatrix} n \\ mn \end{Bmatrix}T^m = \frac{\partial T^n}{\partial x^n} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^m}\sqrt{g}\right)T^m \rightarrow$$

$$\boxed{T^n{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^n}(\sqrt{g}T^n)}$$

$\nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^r}$ is een covariante 1e orde tensor; de geaassocieerde contravariante 1e orde tensor is dan: $A^q = g^{qr}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^r} \to \nabla^2\phi = \nabla\cdot\left(g^{qr}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^r}\right) \to$

$$\boxed{\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^q}\left(\sqrt{g}g^{qr}\frac{\partial\phi}{\partial x^r}\right)}$$

De **Riccitensor** R_{rm} wordt gedefinieerd als de contractie van de 1e en 4e index van $R^s{}_{rmn}$:

$$\boxed{R_{rm} = R^n{}_{rmn} = g^{ns}R_{srmn}}$$

$R_{rm} = g^{ns}R_{srmn} = g^{ns}R_{mnsr} = R^n{}_{mnr} = R_{mr} \to$

$$\boxed{R_{rm} = R_{mr}}$$

Contracties op de 1e en 3e of 2e en 4e index geven hetzelfde resultaat met een minteken. Uit $R^m{}_r = g^{ms}R_{sr}$ en $R_s{}^m = g^{mr}R_{sr}$ volgt nu d.m.v. contractie een invariant, de zgn. **krommingsscalar** R:

$$\boxed{R = R^r{}_r = R_r{}^r}$$

$R^m{}_{l;m} = (g^{mi}R_{il})_{;l} = g^{mi}R_{il;m} = g^{mi}R^j{}_{lij;m} = g^{mi}g^{jk}R_{klij;m} \Leftrightarrow$

$R^m{}_{l;m} = -g^{mi}g^{jk}(R_{mlji;k} - R_{mkji;l}) = -g^{jk}(R^i{}_{lji;k} - R^i{}_{kji;l}) = -g^{jk}(R_{lj;k} - R_{kj;l}) \Leftrightarrow$

$R^m{}_{l;m} = -g^{kj}R_{jl;k} + g^{jk}R_{kj;l} = -R^k{}_{l;k} + R^j{}_{j;l} \Leftrightarrow R^m{}_{l;m} = \frac{1}{2}R^j{}_{j;l} \to$ divergentie van R:

$$\boxed{R^m{}_{l;m} = \tfrac{1}{2}R_{;l} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial R}{\partial x^l}}$$

De **Einsteintensor** $G^i{}_j$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{G^i{}_j = R^i{}_j - \tfrac{1}{2}\delta^i{}_jR}$$

$\nabla\cdot G^i{}_j = R^i{}_{j;i} - \frac{1}{2}\delta^i{}_j\dfrac{\partial R}{\partial x^i} = R^i{}_{j;i} - \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial x^j} = R^i{}_{j;i} - R^i{}_{j;i} = 0$

De covariante divergentie van $G^i{}_j$ (en G^{ij} en G_{ij}) is dus nul.

$g^{jk}G^i{}_k = g^{jk}R^i{}_k - \frac{1}{2}g^{jk}\delta^i{}_kR \to$

$$\boxed{G^{ij} = R^{ij} - \tfrac{1}{2}g^{ij}R}$$

Analoog voor $g_{ik}G^k{}_j$:

$$\boxed{G_{ij} = R_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}R}$$

$G^i{}_i = R^i{}_i - \frac{1}{2}\delta^i{}_iR \to$

$$\boxed{G = R - \tfrac{1}{2}NR}$$

Een **vectorruimte** V is een abstracte ruimte met elementen $u, v, w, \ldots$ (vectoren) waarvoor 2 lineaire operaties zijn gedefinieerd m.b.t. de optelling en scalaire vermenigvuldiging:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \\ \exists \mathbf{0} \in \boldsymbol{V} : \boldsymbol{u}+\mathbf{0} = \boldsymbol{u} \\ \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} : \exists -\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \;\Rightarrow\; a \cdot \boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid a \in I\!R \\ a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v} \mid a \in I\!R \\ (a+b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u} \mid a, b \in I\!R \\ (ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u}) \\ 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \end{array}}$$

De eerste 5 axioma's definieren een vectorruimte als een Abelse commutatieve groep m.b.t. de optelling. In de algemene definiëring van een groep G wordt de binaire operator gedefinieerd als een vermenigvuldiging die niet-commutatief hoeft te zijn:

$$\boxed{\begin{array}{l} u, v \in G \;\Rightarrow\; uv \in G \\ (uv)w = u(vw) \\ \exists e \in G : eu = ue = u \\ \forall u \in G : \exists u^{-1} \in G \mid uu^{-1} = u^{-1}u = e \end{array}}$$

Een **basis** voor een vectorruimte V wordt gedefinieerd als een maximale lineaire onafhankelijke verz. van vecoren $b_1, b_2, b_3, \ldots$; als de verz. een eindig aantal van n elementen bezit, dan is V ei ndig-dimensionaal met dimensie n, anderss oneindig-dimensionaal.
De **standaardbasis** voor R^n, de vectorruimte van n-koppels, is van de vorm:
$\boldsymbol{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \;\wedge\; \boldsymbol{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots \wedge \ldots \boldsymbol{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1)$
Twee mathematische systemen zijn **isomorfisch** als ze qua structuur identiek zijn.
Een **isomorfisme** is een bijectieve (1-1) lineaire afbeelding φ van de ene vectorruimte naar de andere waarvoor geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v}) \\ \varphi(a\boldsymbol{u}) = a\varphi(\boldsymbol{u}) \end{array}}$$

Een isomorfisme voor een groep is een bijectie ψ waarvoor geldt:

$$\boxed{\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)}$$

Een **homomorfisme** is een isomorfisme die niet noodzakelijk bijectief is.
Als U en V 2 vectorruimten zijn, dan wordt de verz. van geordende paren (u, v) ofwel het Cartesisch produkt $U \times V$ in een vectorruimte omgezet door het definiëren van een optelling en een scalaire vermenigvuldiging:

$$\boxed{\begin{array}{l} (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}+\boldsymbol{s}) \\ a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (a\boldsymbol{p}, a\boldsymbol{q}) \end{array}}$$

Een dergelijke produktruimte wordt geschreven als $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}$; $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}^2$
Het produkt van k vectorruimten $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \ldots, \boldsymbol{V_k}$ is dan $\boldsymbol{V_1} \otimes \boldsymbol{V_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{V_k}$
$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{V_2} = \ldots = \boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{V_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{V}^k$

Een **lineaire functionaal** ofwel **1-vorm** is een afbeelding van een vectorruimte V naar de reële getallen R zo, dat geldt $\varphi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v})$ en $\varphi(a\boldsymbol{u}) = a\varphi(\boldsymbol{u})$.
De **algebraïsche duaal** van een vectorruimte V is de verz. V^* van alle lineaire functionalen die een vectorruimte vormt onder gwone optelling en scalaire vermenigvuldiging:

$$\boxed{\begin{array}{l}(f+g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \\ (\lambda f)(\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})\end{array}}$$

Elke lineaire functionaal op R^n is te schrijven als een lineaire functie van de coördinaten:
$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + n^n\boldsymbol{e}_n \to f(\boldsymbol{v}) = v^1 f(\boldsymbol{e}_1) + v^2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + v^n f(\boldsymbol{e}_n)$
Substitutie van $a_i = f(\boldsymbol{e}_i)$ geeft:

$$\boxed{f(\boldsymbol{v}) = a_1 v^1 + a_2 v^2 + \cdots + a_n v^n}$$

Elke lineaire functionaal op R^n is dus geheel bepaald door het n-koppel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, zodat verschillende functionalen overeenkomen met verschillende n-koppels. Lineaire functionalen kunnen daarom in differentiaalvorm als een 1-vorm geschreven worden:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \cdots + a_n dx^n}$$

Voor een vectorruimte die niet overeenkomt met R^n geldt voor de afbeelding van $\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{b}_1 + v^2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + v^n\boldsymbol{b}_n = v^j\boldsymbol{b}_j$, met $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ een willekeurige basis, onder de 1-vorm $\boldsymbol{\omega} = a_i dx^i$:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\omega}(v^j\boldsymbol{b}_j) = (a_i dx^i)(v^j\boldsymbol{b}_j) = a_i v^i}$$

De uitdrukking $a_i v^i$ is **bilineair** in de 2 vectorvariabelen v en ω.
Een basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ voor V legt tevens een basis vast voor de duale ruimte V^*, daar elke $\boldsymbol{v} = v^j\boldsymbol{b}_j \in V$ een lineaire functionaal definieert: $\varphi(\boldsymbol{v}) = v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + \cdots + v^n dx^n$
De n lineaire functionalen (vectoren in V^*) gedefinieerd door $\varphi(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{\beta}^i \mid i = 1, 2, \ldots, n$ vormen dan een basis voor V^*. De basis $\{\boldsymbol{\beta}^i\}$ in V^* heet de **duaal** van de basis $\{\boldsymbol{b}_i\}$ in V, met $\boldsymbol{\beta}^i(\boldsymbol{v}) = (\varphi(\boldsymbol{b}_i))(v^j\boldsymbol{b}_j) = (dx^i)(v^j\boldsymbol{b}_j) = v^i$.
De standaardbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ voor R^n genereert zo de standaardbasis voor $(\boldsymbol{R}^n)^*$:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{e}) = dx^i \mid i = 1, 2, \ldots, n}$$

Als $\{\boldsymbol{b}_i\}$ en $\{\overline{\boldsymbol{b}}_i\}$ 2 verschillende basissen voor V zijn en $\{\boldsymbol{\beta}^i\}$ resp. $\{\overline{\boldsymbol{\beta}}^i\}$ de overeenkomstige basissen voor V^*, dan geldt:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{b}}_i = A_i^j\boldsymbol{b}_j \;\Rightarrow\; \overline{\beta}^i = \overline{A}_i^j\boldsymbol{\beta}^j \mid (\overline{A}_i^j) = (A_j^i)^{-1}}$$

Als $f(\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^m)$ een afbeelding is van m vectorvariabelen naar R zo, dat de afbeelding die verkregen wordt als op 1 na alle variabelen constant zijn een lineaire functionaal is, dan is f **multilineair** in alle m variabelen.
Een $\binom{p}{q}$-tensor wordt nu gedefinieerd als elke multilineaire functionaal T die p 1-vormen en q vectoren afbeeldt naar R:

$$\boxed{T(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^p; \boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^q) : (\boldsymbol{V}^*)^p \otimes \boldsymbol{V}^q \to \boldsymbol{R}}$$

Een $\binom{1}{0}$-tensor geeft reële getallen $T(\boldsymbol{\omega})$ voor alle 1-vormen ω als argument. Een dergelijke tensor komt overeen met een contravariante tensor.
Een $\binom{0}{1}$-tensor geeft reële getallen $T(\boldsymbol{v})$ voor alle vectoren v als argument. Een dergelijke-tensor komt overeen met een covariante tensor.
Een $\binom{1}{1}$-tensor geeft reële getallen $U(\boldsymbol{\omega};\boldsymbol{v})$ voor alle geordende paren in $\boldsymbol{V}^*\otimes\boldsymbol{V}$ als argument.
Een $\binom{0}{2}$-tensor wordt gedefinieerd als een inwendig produkt in kwadratische vorm:

$$\boxed{G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T E\boldsymbol{v}}$$

Hirin is E een (n,n)-matrix en zijn u en v n-dimensionale vectoren.

Een $\binom{0}{2}$-tensor $G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ is **symmetrisch** als voor elke u en v geldt:

$$\boxed{G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}$$

Een $\binom{0}{2}$-tensor $G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ is **niet-singulier** als voor elke u en v geldt:

$$\boxed{G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0}$$

Een $\binom{0}{2}$-tensor $G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ is **positief-definiet** als voor elke $\boldsymbol{u} \neq 0$ geldt:

$$\boxed{G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) > 0}$$

Een **metrische tensor** is een $\binom{0}{2}$-tensor die symmetrisch en tevens niet-singulier is.

Als $C = C^i_j$ een (n,n)-matrix is en a_i en v^j zijn de componenten van ω resp. v m.b.t. de standaardbasis in $\boldsymbol{R}^n$ en zijn duale basis, dan wordt een $\binom{1}{1}$-tensor over $\boldsymbol{R}^n$ gedefinieerd door het matrixprodukt:

$$\boxed{T(\boldsymbol{\omega};\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\omega}C\boldsymbol{v} = a_i C^i_j v^j}$$

Als $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ een basis van V is en $\boldsymbol{\beta}^1,\ldots,\boldsymbol{\beta}^n$ zijn duale basis in $\boldsymbol{V}^*$, dan geldt voor de componenten van een $\binom{1}{0}$- resp. $\binom{0}{1}$- resp. $\binom{1}{1}$-tensor:

$$\boxed{\begin{array}{l}\binom{1}{0}: T^i = T(\boldsymbol{\beta}^i)\\ \binom{0}{1}: T_i = T(\boldsymbol{b}_i)\\ \binom{1}{1}: T^i_j = T(\boldsymbol{\beta}^i;\boldsymbol{b}_j)\end{array}}$$

Onder een translatie van de basis in V en V^* geldt voor de componenten van een $\binom{1}{0}$ resp. $\binom{0}{1}$- resp. $\binom{1}{1}$-tensor:

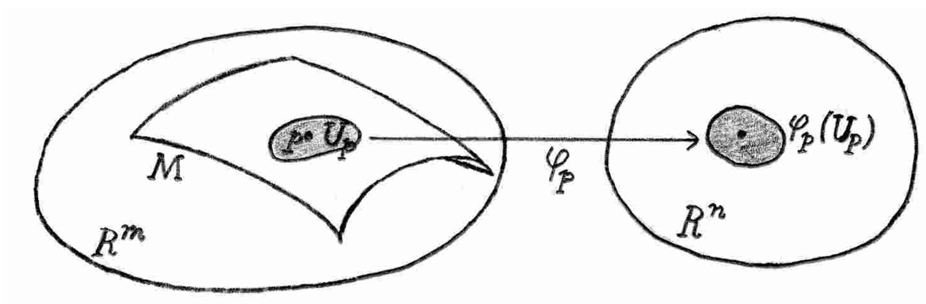
$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{T}^i = T(\overline{\boldsymbol{\beta}}^i) = T(\overline{A}^i_r\boldsymbol{\beta}^r) = \overline{A}^i_r T(\boldsymbol{\beta}^r) = T^r\overline{A}^i_r\\ \overline{T}_i = T(\overline{\boldsymbol{b}}_i) = T(A^r_i\boldsymbol{b}_r) = A^r_i T(\boldsymbol{b}_r) = T_r A^r_i\\ \overline{T}^i_j = T(\overline{\boldsymbol{\beta}}^i;\overline{\boldsymbol{b}}_j) = T(\overline{A}^i_r\boldsymbol{\beta}^r;A^s_j\boldsymbol{b}_s) = \overline{A}^i_r A^s_j T(\boldsymbol{\beta}^r;\boldsymbol{b}_s) = T^r_s\overline{A}^i_r A^s_j\end{array}}$$

Analoge vergelijkingen gelden voor hogere orde tensors.

De **omgeving** U_p van een punt p wordt gedefinieerd als de verz. punten in R^n die binnen een bepaalde afstand van p liggen.

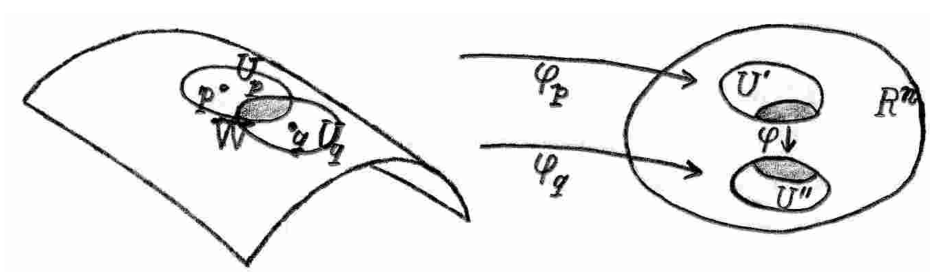
Een verz. is **open** als ieder punt van de verz. een omgeving heeft die geheelit punten bestaat die tot de verz. behoren.
Een **open omgeving** is een omgeving die tevens een open verz. is.

Een **manifold** of **veeloppervlak** is een verz. met de eigenschap dat elk punt kan dienen als de oorsprong van lokale coördinaten die geldig zijn in een open omgeving van dat punt, waarbij de omgeving een exacte afbeelding is van een open omgeving van een punt in in R^n. Voor een manifold M in R^m geldt dan dat M elke verz. in R^m is met de eigenschap dat voor elk punt $p \in \boldsymbol{M}$ er een open omgeving $\boldsymbol{U}_p \in \boldsymbol{M}$ bestaat en een afbeelding φ_p die U_p afbeeldt op een omgeving in R^n. Hierbij is φ_p een **homeomorfische afbeelding**, d.w.z. φ_p en φ_p^{-1} zijn continu en φ_p is bijectief.



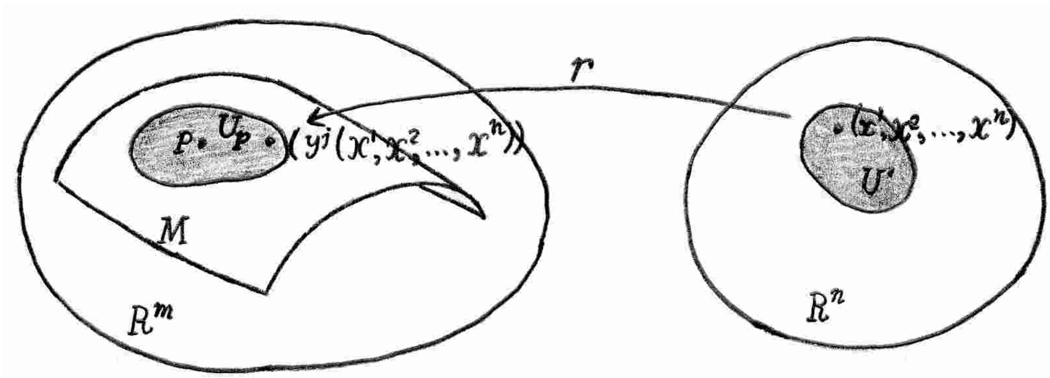
Een **kaart** of **lokale coördinatie** wordt gedefinieerd als het paar $(\boldsymbol{U}_p, \varphi_p)$ voor elk punt $p \in \boldsymbol{M}$.
Een **atlas** voor M wordt gedefinieerd als elke verz. van kaarten met de eigenschap dat de omgevingen U_p samen M bedekken.

Als de omgevingen van $(\boldsymbol{U}_p, \varphi_p)$ en $(\boldsymbol{U}_q, \varphi_q)$ elkaar in M overlappen, dan genereert het gebied $\boldsymbol{U}_p \cap \boldsymbol{U}_q \equiv \boldsymbol{W}$ een afbeelding φ tussen de beelden van W onder φ_p en $\varphi_q : \varphi = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$



Als φ en φ^{-1} van de klasse C^k zijn, d.w.z. in elk punt continue partiële afgeleiden van de k-de orde bezitten, dan is W eveneens van de klasse C^k.

Een **differentieerbaar manifold** wordt gedefinieerd als een manifold dat een atlas bezit zo, dat alle overlappende gebieden W van de klasse C^1 zijn.
Een C^∞-manifold is een manifold met een atlas waarvan de ovrlappende gebieden van de klasse C^∞ zijn.
Voor $1 \leq j \leq m$ wordt de afbeelding φ_p^{-1} die M koppelt aan de coördinaten x^i geschreven als: $\varphi_p^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv \boldsymbol{r}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv (y^j(x^1, x^2, \ldots, x^n))$



Een vectorveld V op een manifold M is een raakvector aan M die continu en differentieerbaar van punt tot punt varieert.
Als $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) = (y^j(x^1, x^2, \dots, x^n)) \mid 1 \le j \le m$ een kromme op M is, dan geldt: $\dfrac{d\boldsymbol{c}}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \cdot \dfrac{dx^i}{dt}$

V wordt nu gedefinieerd als het raakveld van c: $V = V^i \boldsymbol{r}_i = V^i \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$, met de vectoren $\boldsymbol{r}_i$ rakend aan M.

Voor elk differentieerbaar manifold M met kaart U_p in elk punt p wordt de **raakruimte** $T + p(\boldsymbol{M})$ in p gevormd door de opspanning van de vectoren $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n$. De vereniging van alle raakruimten voor alle punten behorende tot M heet de **raakbundel** $T(\boldsymbol{M})$ van M. Een vectorveld V op een manifold M wordt nu gedefinieerd als elke C^∞-functie die M afbeeldt op zijn raakbundel $T(\boldsymbol{M})$, ofwel voor elk punt $p \in \boldsymbol{M}$ is het beeld $\boldsymbol{V}(p) = \boldsymbol{V}_p$ een vector die behoort tot de raakruimte $T_p(\boldsymbol{M})$ in p. Voor scalaire functies V^i geldt dan:

$$\boxed{V = V^i \boldsymbol{r}_i = V^i \frac{\partial y^i}{\partial x^i} = V^i \partial_i \;\Big|\; j = 1, 2, \dots, m}$$

Elk vectorveld op een manifold M bezit een stelsel **stroomkrommen** ofwel **integraalkrommen** op M, dit zijn krommen waarvoor de raakvector in elk punt samenvalt met het vectorveld in dat punt.

Als voor elk punt $p \in \boldsymbol{M}$ $T_p^*(\boldsymbol{M})$ de duaal is van de vectorruimte $T_p(\boldsymbol{M})$, dan heet de vereniging $T^*(\boldsymbol{M})$ van alle dualen de **duale raakbundel** van M.

De differentiaal van een functie $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ wordt gedefinieerd als een 2-vectorfunctie $df : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ die elk paar $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, met x een punt behorende tot R^n en $\boldsymbol{v} = (dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ een richting in R^n, naar een reëel getal afbeeldt:

$$\boxed{df(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n = f_i dx^i}$$

Als $f(x^1, x^2, \dots, x^n) \equiv f(y^1(x^1, \dots, x^n), y^2(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m(x^1, \dots, x^n))$ een willekeurige reële-waarde functie C^k op M is, dan wordt een **differentiaalveld** df op M, zijnde een 1-vorm, gedefinieerd als:

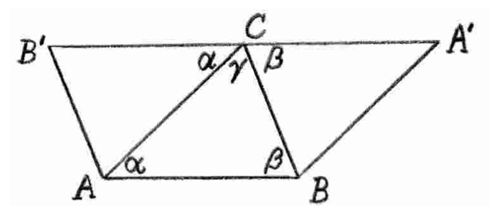
$$\boxed{df = \frac{\partial}{\partial x^i}[f(r(x))] dx^i = \frac{\partial f}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} dx^i = (\nabla f \cdot \boldsymbol{r}_i) dx^i}$$

Hieruit volgt dat df dus op te vatten is als een afbeelding van $\boldsymbol{M} \to T^*(\boldsymbol{M})$, d.w.z. df in een puntt $p \in \boldsymbol{M}$ is de 1-vorm $(\nabla f(p) \cdot \boldsymbol{r}_i(p))dx^i$ in $T_p^*(\boldsymbol{M})$.

Een $\binom{r}{s}$-tensorveld op een manifold M wordt nu gedefinieerd als een afbeelding
$T : [T^*(\boldsymbol{M})]^r \otimes [T(\boldsymbol{M})]^s \to C^k(\boldsymbol{R}^m)$ die r differentiaalvelden en s vectorvelden op M afbeeldt naar reële-waarde C^k-functies f op R^m, waarbij voor T_p geldt:
$T_p(\omega^1, \ldots, \omega^r; V_1, \ldots, V_s) = T(\omega_p^1, \ldots, \omega_p^r; V_{1p}, \ldots, V_{sp}) \equiv f(p)$.

Planimetrie

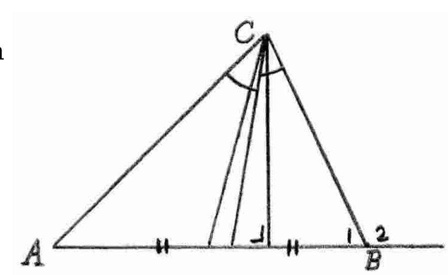
Door elk tweetal punten A en B in het platte vlak wordt een oneindig lange **rechte lijn** ofwel **rechte** l bepaald. Het stuk tussen A en B inclusief deze punten is een **lijnstuk**. Een **halve rechte** is een lijn met aan de ene kant een eindpunt en die aan de andere kant onbegrensd is. Twee niet-samenvallende rechte lijnen *snijden elkaar* als ze 1 punt gemeen hebben.
Een **hoek** wordt gedefinieerd als 2 halve rechten, de *benen*, die een gemeenschappelijk eindpunt hebben, het *hoekpunt*. Een **gestrekte hoek** is een hoek waarvan de benen in elkaars verlengde liggen. Een **rechte hoek** is een hoek die de helft is van een gestrekte hoek. Een **scherpe hoek** resp. **stompe hoek** is een hoek die kleiner resp. groter is dan een rechte hoek.
Een **graad** $1°$ wordt gedefinieerd als het 1/180-deel van een gestrekte hoek.
Er geldt: $1° \equiv 60'$ en $1' \equiv 60''$
Twee hoeken zijn elkaars *supplement* als ze samen $180°$ zijn en elkaars *complement* als ze samen $90°$ zijn.
Nevenhoeken worden gedefinieerd als hoeken die 1 been gemeen hebben en waarvan de beide andere benen in elkaars verlengde liggen. Ze zijn dus elkaars supplement.
Overstaande hoeken worden gedefinieerd als hoeken waarvan de benen van de ene hoek in het verlengde liggen van de benen van de andere hoek. Ze zijn dus even groot.
Een **driehoek** wordt gedefinieerd als 3 niet op 1 lijn liggende punten, de *hoekpunten*, die onderling met elkaar door lijnstukken, de *zijden*, zijn verbonden.



Als in $\triangle ABC$ door C een lijn getrokken wordt parallel aan AB, dan volgt uit de figuur dat
$\alpha + \beta + \gamma = 180° \rightarrow$

De som van de hoeken van een driehoek is $180°$.

Een **gelijkbenige driehoek** is een driehoek met 2 gelijke scherpe basishoeken. De 2 opstaande zijden zijn dan ook gelijk.
Een **gelijkzijdige driehoek** is een driehoek waarvan alle 3 hoeken $60°$ zijn. De 3 zijden zijn dan ook gelijk.
Een **rechthoekige driehoek** is een driehoek waarvan 1 hoek $90°$ is. De 2 andere hoeken zijn dan elkaars complement.



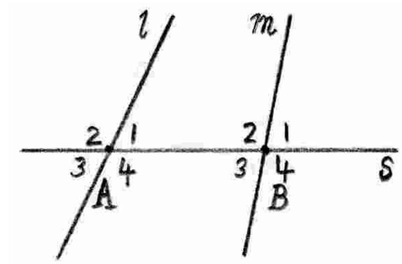
In $\triangle ABC$ is de loodlijn uit C op AB de **hoogtelijn** van $\triangle ABC$, het lijnstuk dat $\angle C$ middendoor deelt een **bissectrice** van $\triangle ABC$ en het lijnstuk dat C verbindt met het midden van AB een **zwaartelijn** van $\triangle ABC$. De nevenhoek $\angle B_2$ van $\angle B_1$ is een **buitenhoek** van $\triangle ABC$.
Stel: $\angle B_1 = \beta \rightarrow \angle B_2 = 180° - \beta$
$\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180° \rightarrow \angle A + \angle C = 180° - \beta \rightarrow \angle B_2 = \angle A + \angle C \rightarrow$

Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de 2 niet aanliggende binnenhoeken.

Twee driehoeken zijn **congruent** als ze:
1. 2 zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben (ZHZ).
2. 1 zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk hebben (HZH).
3. 1 zijde, een aanliggende en de overstaande hoek gelijk hebben (ZHH).
4. de 3 zijden gelijk hebben (ZZZ).

Twee rechthoekige driehoeken zijn congruent als ze een rechthoekszijde en de hypothenusa gelijk hebben (ZZR).

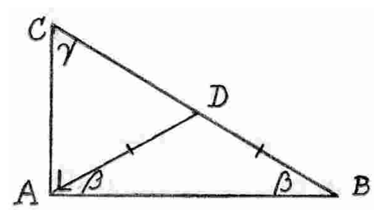
Als 2 rechten l en m door een 3-de rechte s gesneden worden in de punten A en B, dan zijn $\angle A_1$, $\angle A_4$, $\angle B_2$ en $\angle B_3$ **binnenhoeken**, $\angle A_2$, $\angle A_3$, $\angle B_1$ en $\angle B_4$ **buitenhoeken**, $\angle A_1$ en $\angle B_3$, $\angle A_4$ en $\angle B_2$ **verwisselende binnenhoeken** en $\angle A_2$ en $\angle B_4$, $\angle A_3$ en $\angle B_1$ **verwisselende buitenhoeken** en $\angle A_1$ en $\angle B_1$, $\angle A_2$ en $\angle B_2$, $\angle A_3$ en $\angle B_3$, $\angle A_4$ en $\angle B_4$ **overeenkomstige hoeken**.



Als l en m **evenwijdige rechten** zijn, dan zijn de overeenkomstige hoeken gelijk, alsmede de verwisselende binnenhoeken $\rightarrow$

<u>**Parallellenpostulaat**</u>: Door een punt buiten een rechte lijn l kan juist 1 rechte lijn gaan die evenwijdig is met l.

In de rechthoekige $\triangle ABC$ geldt: $\beta = 90° - \gamma$
AD is een lijn zo, dat geldt: $\angle DAB = \beta \rightarrow$
$\angle ADB = 180° - 2\beta \rightarrow \angle ADB = 2\beta$
Tevens geldt: $\angle CAD = 90° - \beta = \gamma \rightarrow$
$AD = CD \rightarrow$

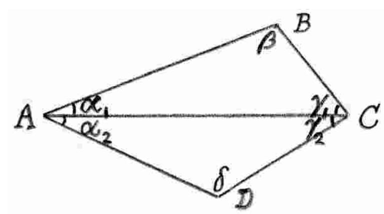


In een rechthoekige driehoek is de zwaartelijn op de hypothenusa gelijk aan de helft hiervan.

Een **vierhoek** wordt gedefinieerd als 4 niet op 1 lijn liggende punten die met elkaar verbonden zijn door lijnstukken.

In vierhoek $ABCD$ verdeelt AC de vierhoek in 2 driehoeken.

$$\left.\begin{array}{l}\text{In } \triangle ABC \text{ geldt: } \alpha_1 + \gamma_1 + \beta = 180° \\ \text{In } \triangle ADC \text{ geldt: } \alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180°\end{array}\right\} \rightarrow$$



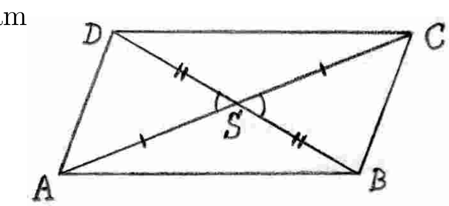
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° = 2 \cdot 180°$

Algemeen geldt voor de som $\sum n$ van de hoeken van een n-hoek:

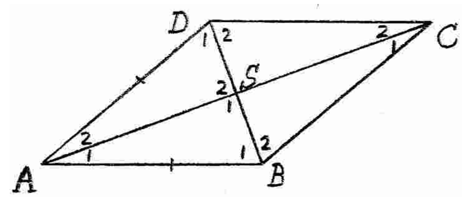
$$\boxed{\sum n = (n-2)180°}$$

Een **parallellogram** is een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn.

In parallellogram $ABCD$ verdeelt AC het parallellogram in 2 congruente driehoeken: $\triangle ABC \cong \triangle CDA \rightarrow$
$\angle ABC = \angle CDA$
Analoog voor de diagonaal BD: $\triangle ABD \cong \triangle CDB \rightarrow$
$\angle BAD = \angle DCB$



In een parallellogram zijn de overstaande hoeken alsmede de overstaande zijden gelijk.
Daar $\triangle ASD \cong \triangle CSB$, volgt hieruit:
In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.
Een **rechthoek** is een paralellogram waarvan de hoeken recht zijn.
Hieruit volgt dat in een rechthoek de diagonalen gelijk zijn.
Een **ruit** is een parallellogram waarvan 2 opeenvolgende zijden gelijk zijn.

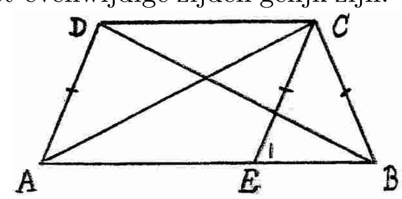


In ruit $ABCD$ geldt dat $\triangle ASB \cong \triangle ASD \rightarrow$
$\angle S_1 = \angle S_2$
$\angle S_1 + \angle S_2 = 180° \rightarrow \angle S_1 = 90° \rightarrow AV \perp BD \rightarrow$
In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar.
Daar tevens geldt: $\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2$ en $\angle D_1 = \angle D_2$ volgt hieruit:
In een ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor.

Een **vierkant** is een rechthoek die tevens ruit is.

Een **trapezium** is een vierhoek waarvan 2 zijden evenwijsig zijn.

Een **gelijkbenig trapezium** is een trapezium waarvan de niet-evenwijdige zijden gelijk zijn.

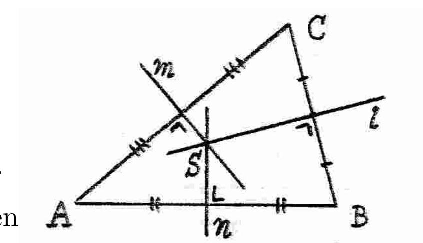


In het gelijkbenig trapezium $ABCD$ is $EC \parallel AD$; daar $AECD$ een parallellogram is, geldt: $AD = EC = BC \rightarrow$
$\angle E_1 = \angle B = \angle A \rightarrow$
In een gelijkbenig trapezium zijn de basishoeken gelijk.
In $ABCD$ is $\triangle ABD \cong \triangle BAC \rightarrow AC = BD \rightarrow$
In een gelijkbenig trapezium zijn de diagonalen gelijk.

In $\triangle ABC$ zijn l, m en n de middelloodlijn van resp. BC, CA en AB.

<u>Stel</u>: $\left.\begin{array}{l} S \in l \rightarrow SB = SC \\ s \in m \rightarrow SC = SA \end{array}\right\} \rightarrow$

$SA = SB \rightarrow S \in n \rightarrow$

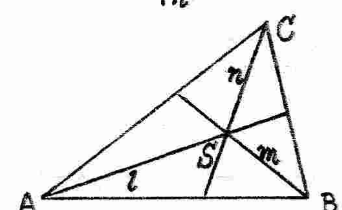


De 3 middelloodlijnen van een driehoek gaan door 1 punt.

In $\triangle ABC$ zijn l, m en n de bissectrice van resp. $\angle A, \angle B$ en $\angle C$.

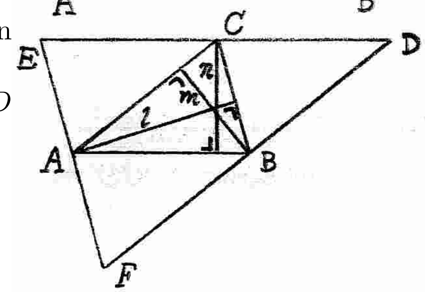
<u>Stel</u>: $\left.\begin{array}{l} S \in l \rightarrow d(S, AB) = d(S, AC) \\ s \in m \rightarrow d(S, AB) = d(S, BC) \end{array}\right\} \rightarrow$

$d(S, AC) = d(S, BC) \rightarrow S \in n \rightarrow$



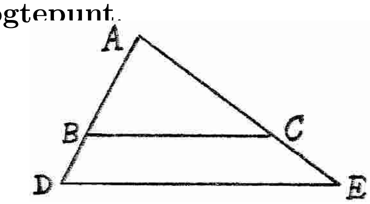
De 3 bissectrices van een driehoek gaan door 1 punt.

In $\triangle ABC$ zijn l, m en n de hoogtelijn van resp. $\angle A, \angle B$ en $\angle C$.
Als $EF \parallel BC, FD \parallel CA$ en $DE \parallel AB$, dan vormen $ABCD$ en $ABCE$ een parallellogram $AB = CD$ en $AB = CE \rightarrow$
$CD = CE$
Tevens geldt: $n \perp AB$ en $AB \parallel DE \rightarrow n \perp DE \rightarrow$
n is de middelloodlijn van DE.
Analoog zijn l en m de middelloodlijn van EF resp. FD.



Daar de 3 middelloodlijnen van $\triangle DEF$ door 1 punt gaan, volgt hieruit:

De 3 hoogtelijnen van een driehoek gaan door 1 punt, het **hoogtepunt**.

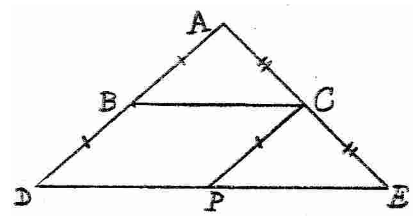


Als in $\triangle ADE$ geldt dat $BC \parallel DE$, dan zijn de zijden van $\triangle ADE$ alle een even groot aantal keren zo lang als die van $\triangle ABC$, ofwel de zijden van $\triangle ADE$ zijn evenredig met die van $\triangle ABC$, ofwel:

$$\boxed{AB : AD = AC : AE = BC : DE}$$

Tevens geldt:

$$\boxed{AB : BD = AC : CE}$$



In $\triangle ADE$ is $AB = BD$ en $AC = CE$. $\rightarrow$
$AB : BD = AC : CE = 1 : 1 \rightarrow BC \parallel DE$
$\triangle ABC \cong \triangle CPE \rightarrow BC = DP = PE \rightarrow BC = \frac{1}{2}DE \rightarrow$

De lijn die de middens van 2 zijden van een driehoek verbindt, de zgn. **middenparallel**, is evenwijdig met de 3-de zijde en gelijk aan de helft daarvan.

Als een punt P t.o.v. O wordt vermenigvuldigt met een getal k, dan geldt voor de afstand van het beeldpunt P' tot O:

$$\boxed{OP' = k \cdot OP}$$

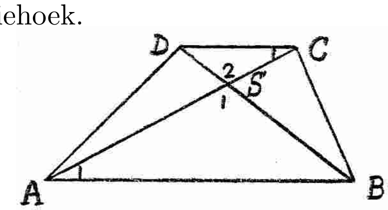
Hierbij ligt P' rechts van O voor $k > 0$ en links van O voor $k < 0$.

Als een n-hoek met een factor k vermenigvuldigd wordt, dan geldt voor de produktfiguur:
1. De zijden zijn evenwijdig aan die van de oorspronkelijke figuur.
2. De zijden zijn k maal zo lang als die van de oorspronkelijke figuur.
3. De hoeken zijn even groot als die van de oorspronkelijke figuur.

Twee figuren zijn **gelijkvormig** als er een vermenigvuldiging bestaat zo, dat de produktfiguur congruent is met de andere figuur.

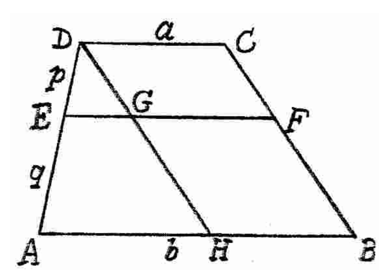
Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze:
1. 2 hoeken gelijk hebben (HHH).
2. 1 hoek gelijk hebben en de omliggende zijden van de ene driehoek evenredig zijn met die van de andere driehoek (ZHZ).
3. de zijden van de ene driehoek evenredig zijn met die van de andere driehoek (ZZZ).

Twee rechthoekige driehoeken zijn gelijkvormig als een rechthoekszijde en de hypothenusa van de ene driehoek evenredig zijn met die van de andere driehoek.



In trapezium $ABCD$ verdelen de diagonalen AC en BD het trapezium o.a. in $\triangle ABS$ en $\triangle CDS$.
$\angle S_1 = \angle S_2$ en $\angle A_1 = \angle C_1 \rightarrow \triangle ABS \sim \triangle CDS \rightarrow$
In een trapezium verdelen de diagonalen elkaar in stukken die zich verhouden als de evenwijzige zijden:

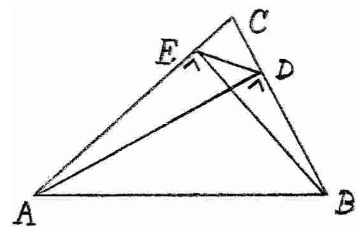
$$\boxed{AS : CS = AB : CD}$$



In trapezium $ABCD$ is $EF \parallel AB \parallel DC$ en $DE : EA = p : q$.
$DH \parallel CB \rightarrow HB = GF = DC = a$ en $AH = AB - HB = b - a$
In $\triangle AHD$ geldt: $EG : AH = DE : DA \Leftrightarrow$
$EG : (b - a) = p : (p + q) \rightarrow EG = \dfrac{(b-a)p}{p+q}$
$EF = EG + GF = \dfrac{(b-a)p}{p+q} + a \rightarrow$

$$\boxed{EF = \frac{aq + bp}{p + q}}$$

In $\triangle ABC$ staat $AD \perp BC$ en $BE \perp AC$.
$\triangle ADC \sim \triangle BEC \rightarrow AD : BE = AC : BC \rightarrow$
De hoogtelijnen van een driehoek zijn omgekeerd evenredig met de zijden waarop ze staan:

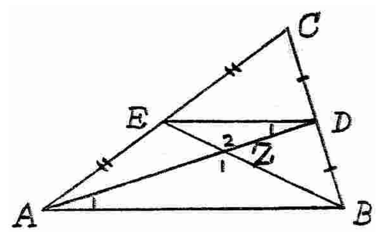


$$\boxed{h_a : h_b = b : a}$$

$\triangle CDA \sim \triangle CEB \rightarrow CD : CE = CA : CB$
$\angle C = \angle C \rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CAB$, ofwel:

Van een scherplijnige driehoek ABC snijden de verbindingsrechten van de voetpunten van de hoogtelijnen driehoeken af die gelijkvormig zijn met $\triangle ABC$.

De **voetpuntsdriehoek** van $\triangle ABC$ wordt gedefinieerd als de driehoek die als hoekpunten de voetpunten van de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ heeft.
In $\triangle ABC$ is $CD = DB$ en $CE = EA$.
$CE : EA = CD : DB = 1 : 1 \rightarrow DE \parallel AB \rightarrow$
$\angle A_1 = \angle D_1$ en $\angle Z_1 = \angle Z_2 \rightarrow \triangle ABZ \sim \triangle DEZ \rightarrow$
$AZ : ZD = AB : DE$
$AB : DE = AC : EC = 2 : 1 \rightarrow$
$AZ : ZD = 2 : 1$, ofwel:



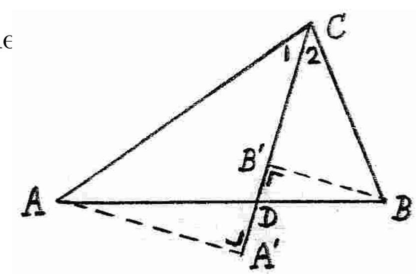
De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als $2 : 1$.

De 3-de zwaartelijn CF verdeelt AD ook in 2 stukken die zich verhouden als $2 : 1$. Daar AD door BE ook wordt verdeeld in 2 stukken die zich verhouden als $2 : 1$, moeten BE en CF dus AD in hetzelfde punt Z snijden $\rightarrow$

De zwaartelijnen van een driehoek ABC gaan door 1 punt, he
In $\triangle ABC$ is $\angle C_1 = \angle C_2, AA' \perp CD$ en $BB' \perp CD \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AA'D \sim \triangle BB'D \rightarrow AD : BD = AA' : BB' \\ \triangle AA'C \sim \triangle BB'C \rightarrow AC : BC = AA' : BB' \end{array}\right\} \rightarrow$$

De bissectrice uit $\angle C$ van $\triangle ABC$ verdeelt de overstaande zijde AB in 2 stukken AD en BD, waarvoor geldt:



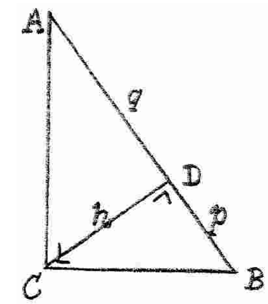
$$\boxed{AD : BD = AC : BC}$$

Analoog geldt voor de buitenbissectrice uit $\angle C$:
Als de buitenbissectrice uit $\angle C$ van $\triangle ABC$ het verlengde van AB in D snijdt, dan geldt:

$$\boxed{AD : BD = AC : BC}$$

De **projectie van een punt** P op een rechte l wordt gedefinieerd als het voetpunt P' van de loodlijn uit P op l.

De **projectie van een lijnstuk** AB op een rechte l wordt gedefinieerd als het lijnstuk $A'B'$ dat de prjecties van A en B op l als uiteinden heeft.



In $\triangle ABC$ is $c = p + q, CD \perp AB$ en $\triangle BCD \sim \triangle BAC \rightarrow$
$BD : BC = BC : BA$
Tevens geldt: $\triangle ADC \sim \triangle ACB \rightarrow AD : AC = AC : AB \rightarrow$

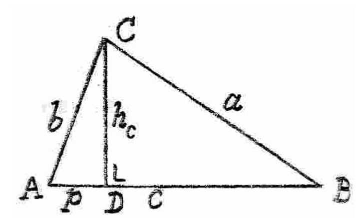
$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = pc \\ b^2 = qc \end{array}}$$

Uit $a^2 + b^2 = (p + q)c$ volgt de **Stelling van Pythagoras**:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

$\triangle ACD \sim \triangle CBD \rightarrow AD : CD = CD : BD \rightarrow$

$$\boxed{h^2 = pq}$$



In $\triangle ABC$ is $CD = h_c \perp AB$ en $AD = p$. $\rightarrow$
$a^2 = h_c^2 + (c - p)^2 = h_c^2 + c^2 - 2cp + p^2$
Substitutie van $h_c^2 = b^2 - p^2$ geeft de **Projectiestelling**:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cp}$$

Analoog geldt in een stomphoekige driehoek:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2cp}$$

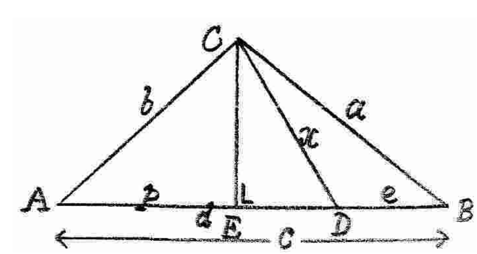
Substitutie van $p = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$ in $h_c^2 = (b + p)(b - p)$ geeft:

$$h_c^2 = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} \Leftrightarrow$$

$$h_c^2 = \frac{(b_c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2}$$

Stel: $a + b + c = 2s \rightarrow h_c^2 = \dfrac{4s(s - a)(s - b)(s - c)}{c^2} \rightarrow$

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}$$



In $\triangle ABC$ verdeelt punt D zijde AB in $AD = d$
en $DB = c$; $AE = p, CD = x$ en $CE \perp AB$.
In $\triangle ADC$ geldt: $x^2 = b^2 + d^2 - 2dp$
In $\triangle ABC$ geldt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cp \rightarrow$
$p = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$
Substitutie in x^2 geeft: $x^2 = b^2 + d^2 - [d(b^2 + c^2 - a^2)/c] \Leftrightarrow$

$x^2c = a^2d + b^2(c-d) - cd(c-d)$

Stel: $c - d = e \rightarrow$

Formule van Stewart:

$$\boxed{x^2c = a^2d + b^2e - cde}$$

Als $CD = m_c$ de zwaartelijn uit $\angle C$ is, dan geldt: $AD = DB = \frac{1}{2}c \rightarrow$

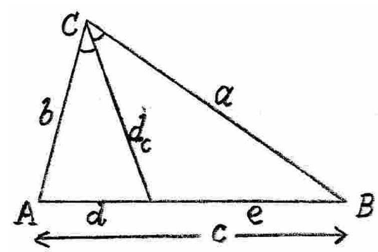
$m_c^2c = \frac{1}{2}a^2c + \frac{1}{2}b^2c - \frac{1}{4}c^3 \rightarrow$

$$\boxed{m_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

In $\triangle ABC$ is $CD = d_c$ de binnenbissectrice van $\angle C \rightarrow$
$d_c^2c = a^2d + b^2e - cde$ en $d/e = b/a$
Substitutie van $e = c - d$ resp. $d = c - e$ geeft:

$d = \dfrac{bc}{a+b}$ en $e = \dfrac{ac}{a+b} \rightarrow d_c^2c = \dfrac{a^2bc}{a+b} + \dfrac{b^2ac}{a+b} - cde \Leftrightarrow$

$d_c^2 = \dfrac{a^2b + b^2a}{a+b} - de = \dfrac{ab(a+b)}{a+b} - de \rightarrow$



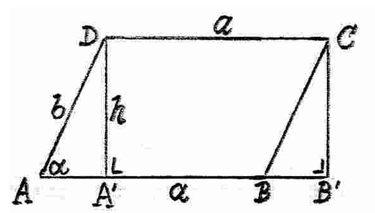
$$\boxed{d_c = \sqrt{ab - de}}$$

De **oppervlakte-eenheid** wordt gedefinieerd als een vierkant met zijden 1.

De oppervlakte O van een rechthoek met zijden a en b wordt nu gedefinieerd als:

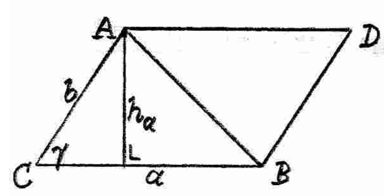
$$\boxed{O_{rechthoek} = ab}$$

In parallellogram $ABCD$ is $DA' \perp AB$ en $CB' \perp AB$.
$\triangle DAA' \cong \triangle CBB' \rightarrow O_{ABCD} = O_{A'B'CD} \rightarrow$



$$\boxed{O_{parallellogram} = ah = ac\sin\alpha}$$

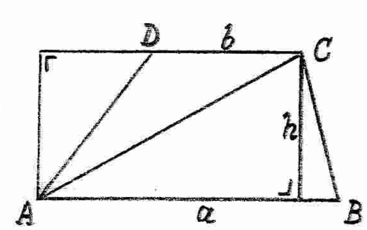
In $\triangle ABC$ is $AD \parallel CB$ en $BD \parallel CA$.
$\triangle ABC \cong \triangle BAD \rightarrow O_{abcd} = 2O_{\triangle ABC} = ah_a = ab\sin\gamma \rightarrow$



$$\boxed{O_{driehoek} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

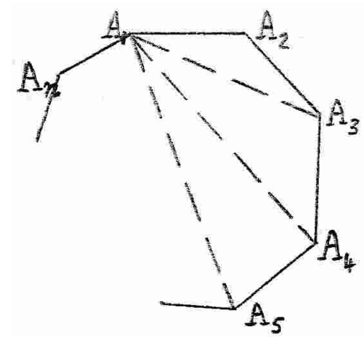
In trapezium $ABCD$ verdeelt diagonaal AC het trapezium in 2 driehoeken, waarvoor geldt:

$$\left.\begin{array}{l} O_{ABC} = \frac{1}{2}ah \\ O_{CDA} = \frac{1}{2}bh \end{array}\right\} \rightarrow$$



$$\boxed{O_{trapezium} = \frac{1}{2}h(a+b)}$$

Als $\triangle ABC$ met een factor k wordt vermenigvuldigd, dan geldt voor de oppervlakte van de produktfiguur:
$O_{A'B'C'} = \frac{1}{2}a'h'_a = \frac{1}{2}ka \cdot kh_a = \frac{1}{2}k^2ah_a = k^2O_{ABC}$
een willekeurige veelhoek $A_1A_2A_3\ldots A_n$ is te verdelen in driehoeken door vanuit een willekeurig hoekpunt alle diagonalen te trekken. Bij vermenigvuldiging van de veelhoek met een factor k wordt de oppervlakte van elke driehoek met k^2 vermenigvuldigd. $\rightarrow$



Als een veelhoek met een factor k vermenigvuldigd wordt, dan wordt de oppervlakte k^2 maal zo groot.

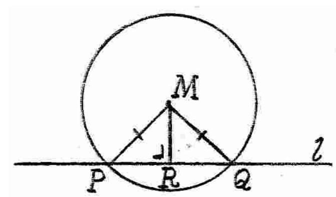
Voor een driehoek geldt: $k = \dfrac{a'}{a} \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{a'^2}{a^2} \rightarrow \dfrac{O_{\triangle A'B'C'}}{O_{\triangle ABC}} = \dfrac{a'^2}{a^2}$
Dit geldt analoog voor veelhoeken $\rightarrow$

De oppervlakten van gelijkvormige veelhoeken verhouden zich als de kwadraten van overeenkomstige zijden.

Een **cirkel** $\odot(M, r)$ wordt gedefinieerd als de verz. punten die een gegeven afstand r tot een gegeven punt M hebben.

Door 3 punten die niet op 1 rechte lijn liggen, gaat 1 cirkel.

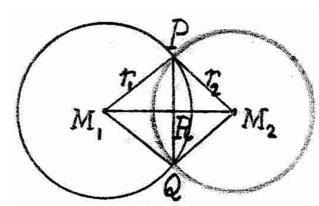
In $\odot(M, r)$ is $MR \perp l$ en is PQ een **koorde** van de cirkel.
$\triangle MRP \cong \triangle MRQ \rightarrow PR = RQ \rightarrow$
Een loodlijn uit het middelpunt van een cirkel op een koorde deelt de koorde middendoor.



De **centraal** van 2 cirkels wordt gedefinieerd als de verbindingslijn van de middelpunten van de cirkels.
Als $\odot(M_1, r_1)$ en $\odot(M_2, r_2)$ elkaar snijden in de punten P en Q, dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} M_1P = M_1Q \rightarrow M_1 \in \text{ middelloodlijn van } PQ \\ M_2P = M_2Q \rightarrow M_2 \in \text{ middelloodlijn van } PQ \end{array}\right\} \rightarrow$$

$PR = RQ \rightarrow$



Als 2 cirkels elkaar snijden, dan is de centraal de middelloodlijn van de gemeenschappelijke koorde.

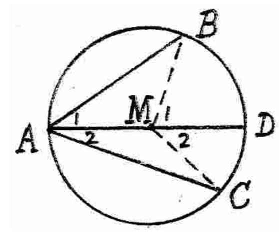
Twee cirkels raken elkaar *uitwendig* als ze aan verschillende kanten van de gemeenschappelijke raaklijn liggen en **inwendig** als ze aan dezelfde kant van de raaklijn liggen. In beide gevallen ligt het raakpunt op de centraal en staat de raaklijn hier loodrecht op.

Een **middelpuntshoek** van een cirkel wordt gedefinieerd als een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van de cirkel is. Hierbij geldt dat gelijke middelpuntshoeken op gelijke bogen staan en dat 2 middelpuntshoeken evenredig zijn met de bogen waarop ze staan.

Een **booggraad** wordt gedefinieerd als een boog waarop een middelpuntshoek van 1° staat.

Een middelpuntshoek is nu gelijk aan de boog waarop hij staat.

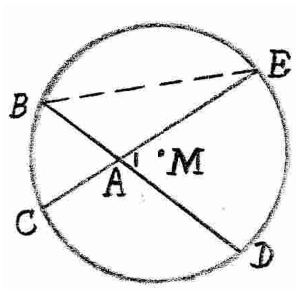
Een **omtrekshoek** van een cirkel wordt gedefinieerd als een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen elk nog een punt met de cirkel gemeen hebben, dan wel de cirkel raken.

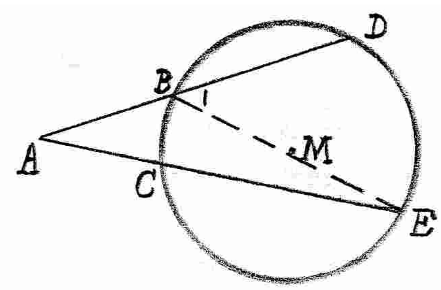


In $\odot(M,r)$ is $\angle M_1$ een buitenhoek van $\triangle AMB \rightarrow$
$\angle M_1 = \angle A_1 + \angle B$
Tevens geldt: $AM = BM \rightarrow \angle A_1 = \angle B \rightarrow$
$\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle M_1 = \frac{1}{2}bgBD$
Analoog geldt: $\angle A_2 = \frac{1}{2}bgDC \rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}bgBC \rightarrow$

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

Een **binnenomtrekshoek** van een cirkel wordt gedefinieerd als een hoek waarvan het hoekpunt binnen de cirkel ligt.





In $\odot(M,r)$ is $\angle A_1 = \angle B + \angle E = \frac{1}{2}bgDE + \frac{1}{2}bgBC = \frac{1}{2}(bgBC + bgDE) \rightarrow$

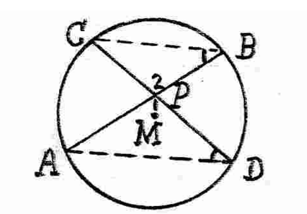
Een binnenomtrekshoek is gelijk aan de halve som van de bogen waarop hij staat.

Een **buitenomtrekshoek** van een cirkel wordt gedefinieerd als een hoek waarvan het hoekpunt buiten de cirkel ligt en de benen de cirkel snijden, dan wel raken.

In $\odot(M,r)$ is $\angle B_1 = \angle A + \angle E. \rightarrow /angleA = \angle B_1 - \angle E = \frac{1}{2}bgDE - \frac{1}{2}bgBC \Leftrightarrow$
$\angle A = \frac{1}{2}(bgDE - bgBC) \rightarrow$

Een buitenomtrekshoek is gelijk aan het halve verschil van de bogen waarop hij staat.

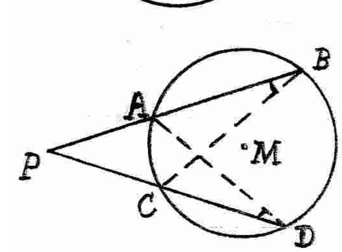
In $\odot(M,r)$ snijden AB en CD elkaar in punt P.
$\triangle APD \sim \triangle CPB \rightarrow AP : CP = PD : PB \rightarrow$



$$\boxed{AP \cdot PB = CP \cdot PD}$$

Buiten $\odot(M,r)$ snijden AB en CD elkaar in punt P.
$\triangle PAD \sim \triangle PCB \rightarrow PA : PC = PD : PB \rightarrow$

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$



Als PC de cirkel in punt C raakt, dan geldt:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC^2}$$

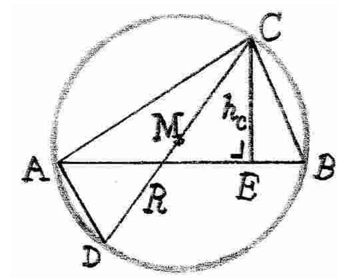
De **omgeschreven cirkel** v an een driehoek wordt gedefinieerd als de cirkel die door de hoekpunten van de driehoek gaat.

Als $\odot(M,R)$ de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is en $CE = h_c \perp AB$, dan geldt:

$\triangle CDA \sim \triangle CBE \to CD : CB = CA : CE \Leftrightarrow$

$2R : a = b : h_c \Leftrightarrow R = \dfrac{ab}{2h_c} = \dfrac{abc}{2h_c c}$

$4O_{\triangle ABC} = 2h_c c \to R = \dfrac{abc}{4O} \to$



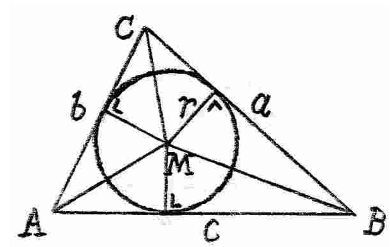
$$\boxed{R_{\odot(M,R)} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$$

De **ingeschreven cirkel** van een driehoek wordt gedefinieerd als de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek.

Als $\odot(M,r)$ de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is, dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} O_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}ar \\ O_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}br \\ O_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}cr \end{array}\right\} \to O_{\triangle ABC} = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r = sr \to$$

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \to$$



$$\boxed{r_{\odot(M,r)} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

Een **aangeschreven cirkel** van een driehoek wordt gedefinieerd als een cirkel die raakt aan een zijde van de driehoek en aan de verlengden van de beide andere zijden van de driehoek.

Als $\odot(M,r_a)$ een aangeschreven cirkel is van $\triangle ABC$, dan geldt:

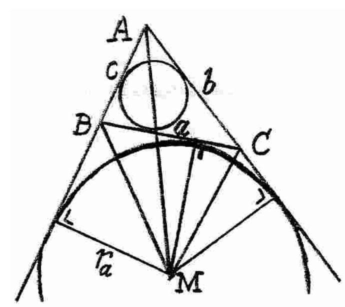
$O_{ABMC} = O_{ABM} + O_{ACM} = \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a = \frac{1}{2}(b+c)r_a \to$

$O_{ABC} = \frac{1}{2}(b+c)r_a - O_{BCM} = \frac{1}{2}(b+c)r_a - \frac{1}{2}ar_a \Leftrightarrow$

$O_{ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c-2a)r_a = (s-a)r_a \to$

$$r_a = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$$

Analoog voor r_b en r_c $\to$

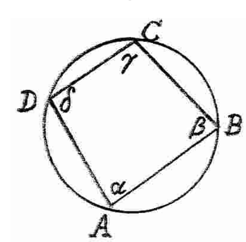


$$\boxed{r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} \quad r_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}} \quad r_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}}$$

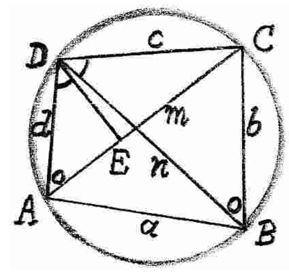
Een **koordenvierhoek** wordt gedefinieerd als een vierhoek die een omgeschreven cirkel heeft.

In koordenvierhoek $ABCD$ geldt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}bgBCD \\ \gamma = \frac{1}{2}bgDAB \end{array}\right\} \to \alpha + \gamma = \tfrac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ \to$$



De som van 2 overstaande hoeken van een koordenvierhoek is 180°.



In koordenvierhoek $ABCD$ is $AC = m$ en $BD = n$.
Als E een punt van AC is zo, dat $\angle ADE = \angle BCD$,
dan geldt, daar $\angle DAC = \angle CBD : \triangle ADE \sim \triangle BCD \rightarrow$
$AD : BD = AE : BC \Leftrightarrow d : n = AE : b \Leftrightarrow n \cdot AE = bd$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ADB = \angle EDC \\ \angle ABD = \angle DCA\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ADB \sim \triangle EDC \rightarrow$$

$AB : EC = DB : DC \Leftrightarrow a : EC = n : c \Leftrightarrow n \cdot EC = ac \rightarrow n(AE + EC) = bd + ac \rightarrow$

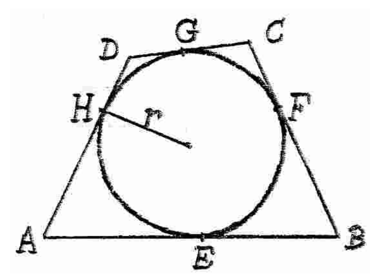
Stelling van Ptolemaeus:

$$\boxed{mn = ac + bd}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_{ABCD} = O_{ABC} + O_{CDA} = \dfrac{abm}{4R} + \dfrac{cdm}{4R} = \dfrac{(ab + cd)m}{4R} \\[2ex] O_{ABCD} = O_{ABD} + O_{CDB} = \dfrac{adn}{4R} + \dfrac{bcn}{4R} = \dfrac{(ad + bc)n}{4R} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}}$$

Een **raaklijnenvierhoek** wordt gedefinieerd als een vierhoek waarvan alle zijden raken aan een cirkel.



In raaklijnenvierhoek $ABCD$ geldt:

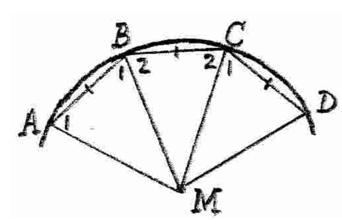
$AE = AH$ en $BE = BF$ en $CG = CF$ en $DG = DH \rightarrow$
$(AE + BE) + (CG + DG) = (BF + CF) + (AH + DH) \rightarrow$
$AB + CD = BC + AD \rightarrow$

De som van 2 overstaande zijden van een raaklijnenvierhoek is gelijk aan de som van de beide andere zijden.

Als de omtrek van $ABCD$ gelijk aan $2s$ is en de straal van de ingeschreven cirkel r, dan geldt:
$O_{ABCD} = O_{ABM} + O_{BCM} + O_{CDM} + O_{DAM} = \frac{1}{2}r(AB + C + CD + DA) = \frac{1}{2}r \cdot 2s \rightarrow$

$$\boxed{O_{raaklijnenvierhoek} = rs}$$

Een **regelmatige veelhoek** wordt gedefinieerd als een veelhoek waarvan alle zijden en hoeken gelijk zijn.



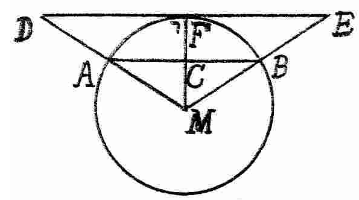
Een regelmatige veelhoek heeft een om- en ingeschreven cirkel die concentrisch zijn. De middelpuntshoeken zijn hierbij gelijk. Voor een middelpuntshoek φ_n van een regelmatige n-hoek geldt dan:

$$\boxed{\varphi_n = \frac{360°}{n}}$$

Voor de hoek α van een regelmatige n-hoek geldt: $\alpha = \angle A_1 + \angle B_1 \rightarrow$

$$\boxed{\alpha = 180^\circ - \varphi_n}$$

Als $AB = z_n$ en $DE = Z_n$ de zijde van een ingeschreven - resp. omgeschreven regelmatige n-hoek is en $MC \perp AB$ en $MF = R \perp DE$, dan geldt: $MC^2 = MA^2 - AC^2 \Leftrightarrow MC^2 = R^2 - \frac{1}{4}z_n^2 \rightarrow MC = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - z_n^2}$



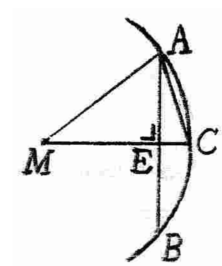
Tevens geldt: $\triangle DFM \sim \triangle ACM \rightarrow$

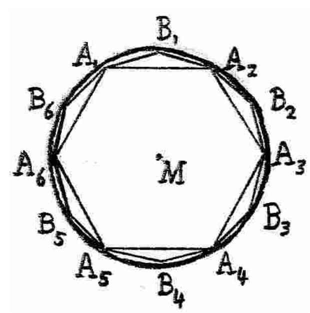
$DC : AC = FM : CM \Leftrightarrow \frac{1}{2}Z_n : \frac{1}{2}z_n = R : \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - z_n^2} \rightarrow$

$$\boxed{Z_n = \frac{2z_nR}{\sqrt{4R^2 - z_n^2}}}$$

Als $AB = z_n$ en $AC = z_{2n}$ de zijde is van een regelmatige n-hoek resp. $2n$-hoek in $\odot(M, R)$ en $MC \perp AB$, dan geldt: $AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MC \cdot ME = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}z_n^2} \rightarrow$

$$\boxed{z_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - z_n^2}}}$$





In $\odot(M, r)$ is $A_1A_2 \ldots A_6$ een regelmatige 6-hoek, $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{12}B_{12}$ een regelmatige 12-hoek,...; als de omtrek van deze regelmatige veelhoeken resp. $o_6, o_{12}, o_{18}, \ldots$ bedraagt, dan geldt, daar $A_1A_2 < A_1B_1 + B_1A_2, \ldots$ dat $o_6 < o_{12} < o_{18} < \ldots$ Deze rij nadert tot een bepaalde limiet, zijnde de **omtrek van de cirkel**.

Het trancendente getal $\pi \approx 3,14159$ wordt nu gedefinieerd als het quotiënt van de omtrek en de lengte van de middellijn van een cirkel.

Hieruit volgt voor de omtrek van een cirkel met straal r:

$$\boxed{o_{cirkel} = 2\pi r}$$

Daar een middelpuntshoek van α° gelijk is aan de boog waarop hij staat, geldt:

$\dfrac{o_{cirkelboog}}{o_{cirkel}} = \dfrac{\alpha^\circ}{360^\circ} \rightarrow$

$$\boxed{o_{cirkelboog} = \frac{\pi r \alpha}{180}}$$

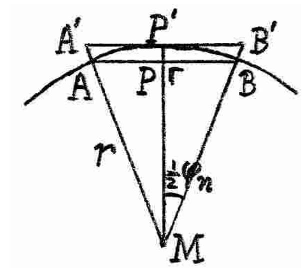
Substitutie van $o_{cirkelboog} = r$ geeft: $\alpha = 180/\pi \rightarrow$

De grootte van een middelpuntshoek is dus onafhankelijk van de straal van de cirkel.

Een **radiaal** wordt gedefinieerd als de hoek die, als middelpuntshoek van een cirkel opgevat, staat op een boog met een lengte gelijk aan de straal van de cirkel.

Daar $1^\circ = \pi/180^\circ$, bevat een hoek van α° dus $\alpha\pi/180^\circ \rightarrow$

$$\boxed{o_{cirkelboog} = \alpha R}$$



Als in en om $\odot(M, r)$ een regelmatige veelhoek wordt beschreven, dan verhouden de oppervlakten van de veelhoeken zich als de oppervlakten van 2 middelpuntsdriehoeken.

$$\triangle MAB \sim \triangle MA'B' \rightarrow \frac{O_{\triangle MAB}}{O_{\triangle MA'B'}} = \frac{MP^2}{MP'^2} \Leftrightarrow$$

$$O_{\triangle MAB} O_{\triangle MA'B'} = \left(\frac{MP}{MB}\right)^2 = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi_n \rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{O_{\triangle MAB}}{O_{\triangle MA'B'}} = \cos^2 0 = 1 \rightarrow$$

De oppervlakte van de ingeschreven - en omgeschreven n-hoek nadert dus tot de oppervlakte van de cirkel als n onbeperkt toeneemt.

Voor de oppervlakte van een middelpuntsdriehoek van een ingeschreven regelmatige n-hoek geldt: $O = \frac{1}{2} MP \cdot AB = \frac{1}{2} r \cos \frac{1}{2}\varphi_n \cdot AB \rightarrow$

$$O_{n-\text{hoek}} = \tfrac{1}{2} r \cos \tfrac{1}{2}\varphi_n (AB + BC + \cdots) = \tfrac{1}{2} r \cos \tfrac{1}{2}\varphi_n \cdot o_n \rightarrow \lim_{n\to\infty} O_{n-\text{hoek}} = \tfrac{1}{2} r \cdot 2\pi r \rightarrow$$

$$\boxed{o_{cirkel} = \pi r^2}$$

Daar een middelpuntshoek van α° gelijk is aan de boog waarop hij staat, geldt:

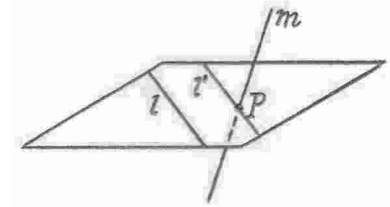
$$\frac{O_{cirkelsector}}{O_{cirkel}} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \rightarrow$$

$$\boxed{o_{cirkelsector} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}}$$

Stereometrie

Een **plat vlak** wordt gedefinieerd door 3 punten die niet op 1 lijn liggen. Twee vlakken die 3 punten gemeen hebben vallen dus samen. Een vlak wordt tevens bepaald door een rechte l en een punt P buiten l, door 2 snijdende rechten l en m, en door 2 parallelle rechten l en n.

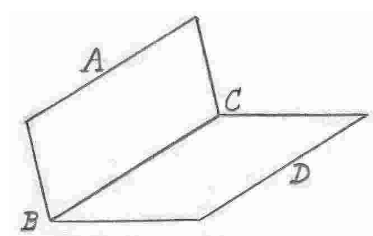
Twee rechten l en m in de ruimte *kruisen* elkaar als ze niet in hetzelfde vlak liggen; is dit wel zo maar hebben ze geen enkel punt gemeen, dan zijn ze *evenwijdig*. Als P een punt is van m en in hetzelfde blak ligt als l en l' is een rechte parallel aan l, dan wordt de hoek tussen l en m gedefinieerd als de hoek tussen l' en m.



Als een rechte l een vlak V snijdt in punt P en loodrecht staat op de rechten m en n van V die door P gaan, dan staat l loodrecht op elke rechte van V die door P gaat; l is dan de loodlijn in P op V.
Uit een punt P buiten een vlak V kan slechts 1 loodlijn op V neergelaten worden. Als 2 rechten loodrecht op eenzelfde vlak staan, dan zijn ze evenwijdig, ofwel: als 2 rechten l en m beide evenwijdig zijn met een 3-de rechte, dan zijn l en m onderling evenwijdig.
De **projectie** van een punt P op een vlak V wordt gedefinieerd als het voetpunt van de loodlijn uit P op V. De afstand van P tot V wordt gedefinieerd als de lengte van deze loodlijn. De projectie van een lijn l op V wordt gedefinieerd als de verz. punten van de projecties van alle punten van l. Als l een rechte lijn is die niet loodrecht op V staat, dan is de projectie van l eveneens een rechte lijn.
De hoek tussen een rechte l die een vlak V in een punt A snijdt en V wordt gedefinieerd als de scherpe hoek die l maakt met elke andere rechte door A in V. Als l geen enkel punt met V gemeen heeft, dan is l parallel met V.
Als 2 vlakken geen enkel punt gemeen hebben, dan zijn ze evenwijdig, ofwel: als 2 vlakken loodrecht op dezelfde rechte staan, dan zijn ze parallel. Twee vlakken V en W zijn evenwijdig als 2 snijdende rechten van V evenwijdig zijn met 2 snijdende rechten van W.
Als 2 parallelle vlakken gesneden worden door een 3-de vlak, dan zijn de snijlijnen parallel. Door een punt buiten een vlak V kan maar 1 vlak worden aangebracht dat parallel is met V.

Een **halfvlak** wordt gedefinieerd als een vlak dan aan één kant begrensd wordt door een rechte, een zgn. *grensrechte*.

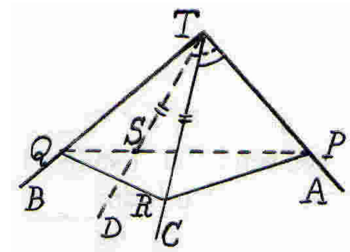
Een **tweevlakshoek** wordt gedefinieerd als 2 halve vlakken, de *zijden*, die een gemeenschappelijke grensrechte, de zgn. *ribbe*, bezitten. De **standhoek** van een tweevlakshoek wordt gedefinieerd als de hoek die gevormd wordt door de loodlijnen uit een punt van de ribbe in elk der zijden.



Twee vlakken staan loodrecht op elkaar als 1 van de vlakken een rechte bevat, die loodrecht op het andere vlak staat. Als 2 snijdende vlakken loodrecht staan op een 3-de vlak, dan staat hun snijlijn loodrecht op dat vlak.

Een **veelvlakshoek** wordt gedefinieerd als dat deel van de ruimte dat begrensd wordt door meer dan 3 vlakken die door eenzelfde punt gaan en elkaar 2 aan 2 snijden, waarbij de vlakken door de snijlijnen begrensd worden. De tophoeken heten de *zijden* van de veelvlakshoek.

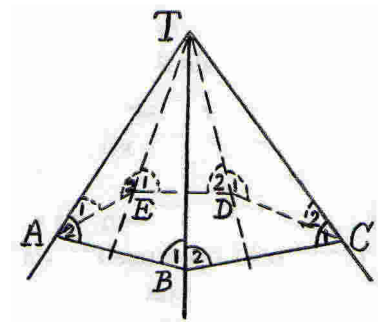
Als in drievlakshoek $TABC$ zijde ATB het langst is en zijde ATC is gelijk aan zijde ATD met $TS = TR$, dan geldt:
$\triangle TPS \cong \triangle TPR \rightarrow PS = PR \rightarrow QS = QP - RP \rightarrow QS < QR$
Voor $\triangle TQS$ en $\triangle TQR$ geldt: $TQ = TQ$ en $TS = TR$
Daar $QS < QR$ volgt hieruit: $\angle QTS < \angle QTR$



Tevens geldt: $\angle STP = \angle RTP \rightarrow \angle QTS + \angle STP = \angle QTP < \angle QTR + \angle RTP \rightarrow$
In een drievlakshoek is 1 zijde kleiner dan de som van beide andere zijden.
Als veelvlakshoek $TABCDE$ met een plat vlak gesneden wordt, dan ontstaan een n-hoek en n-drievlakshoeken, waarvoor geldt:

$$\left.\begin{array}{l} \angle A < \angle A_1 + \angle A_2 \\ \angle B < \angle B_1 + \angle B_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \rightarrow$$

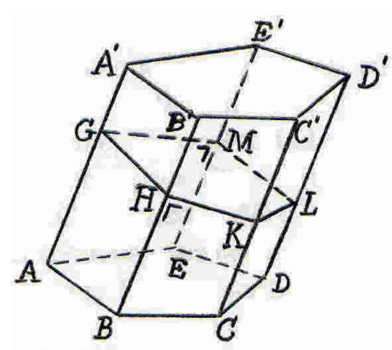
$\angle A + \angle B + \cdots < \angle A_2 + \angle B_1 + \angle B_2 + \angle C_1 + \cdots \Leftrightarrow$
$(n-2)180° < 180° - \angle ATB + 180° - \angle BTC + \cdots \Leftrightarrow$
$(n-2)180° < n.180° -$ som der zijden $\rightarrow$
som der zijden $< 2.180° \rightarrow$
De som der zijden van een veelvlakshoek is kleiner dan 360°



Een **convex veelvlak** wordt gedefinieerd als een gesloten oppervlak van veelhoeken en bijbehorende vlakken zo, dat elke zijde gemeenschappelijk is aan 2 veelhoeken.
In elk hoekpunt van het veelvlak vormen de daarin samenkomende zijden ofwel ribben met de vlakke hoeken een veelvlakshoek. Een *diagonaal* is elke rechte die 2 hoekpunten van het veelvlak verbindt en niet in een zijvlak ligt. Een *diagonaalvlak* is elk vlak door 2 ribben die niet tot hetzelfde zijvlak behoren.
Voor alle convexe veelvlakken geldt de **Stelling van Euler**:
De som van de aantallen zijvlakken en hoekpunten is 2 groter dan het aantal ribben:

$$\boxed{Z + H = R + 2}$$

Een **prisma** wordt gedefinieerd als een veelvlak dat gevormd wordt door 2 evenwijdige vlakken, het *grondvlak* en het *bovenvlak*, en verder door zijvlakken die elkaar 2 aan 2 volgens evenwijdige lijnen, de *ribben*, snijden en die beide evenwijdige vlakken snijden volgens convexe veelhoeken. Een *recht* prisma is een prisma waarvan de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan; als het grondvlak hierbij een regelmatige veelhoek is, dan hete het prisma *regelmatig*.



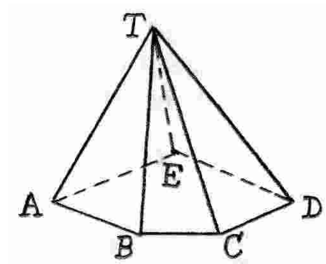
Een **parallellepipedum** wordt gedefinieerd als een prisma waarvan het grondvlak een parallellogram is.
Een **kubus** wordt gedefinieerd als een parallellepipedum waarvan alle ribben dezelfde lengte hebben en de opstaande ribben loodrecht staan op een rechthoekig grondvlak.

Als $GHKLM$ een loodrechte doorsnede van het prisma $ABCDEA'B'C'D'E'$ is, dan snijdt ze alle evenwijdige ribben rechthoekig. De paralellogrammen die samen het zijdelingse oppervlak O_z vormen hebben dan de zijden van $GHKLM$ als hoogte. $\rightarrow$

$O_z = AA'.GH + BB'.HK + \cdots \rightarrow$

$$\boxed{O_{z,prisma} = AA'(GH + HK + \cdots)}$$

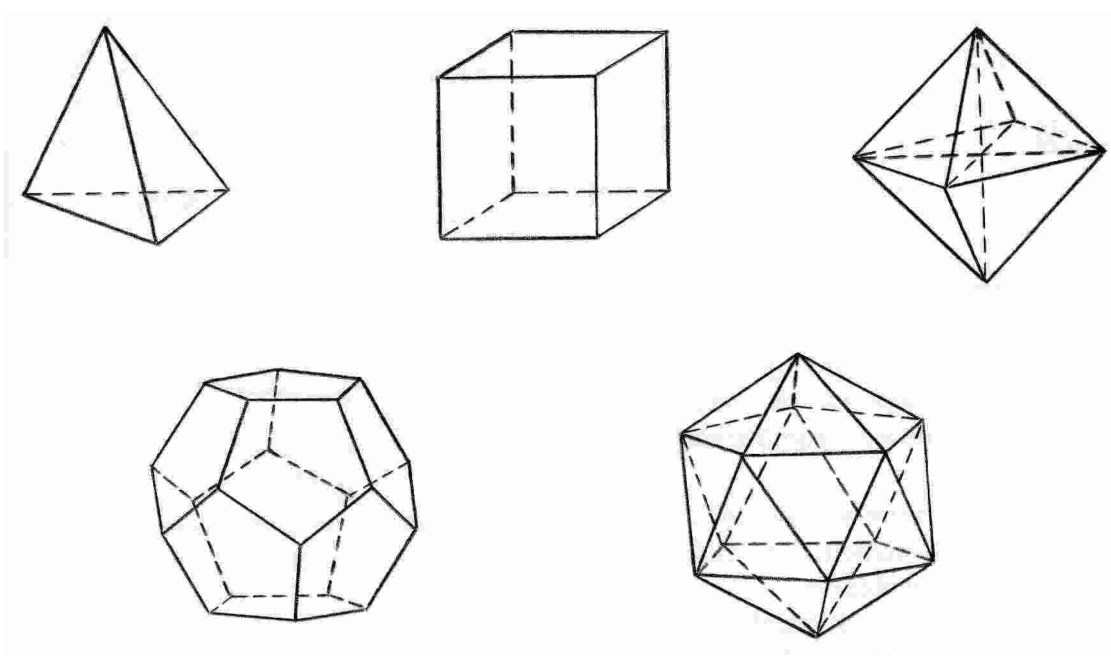
Een **piramide** wordt gedefinieerd als een veelvlak dat gevormd wordt door een veelvlakshoek en een grondvlak dat alle zijden van de veelvlakshoek snijdt. Een *regelmatige* piramide is een piramide met een reglmatige veelhoek als grondvlak en waarvan de top ligt op de loodlijn op het middelpunt van het grondvlak. De zijvlakken vormen dan gelijkbenige driehoeken en de hoogtelijn uit de top van elke driehoek heet *apothema* ofwel *schuine hoogte* van de piramide.



Daar de doorsnede van een piramide met een vlak evenwijdig met het grondvlak een veelhoek is die gelijkvormig is met het grondvlak, verhouden de zijden van de doorsnede zich tot de overeenkomstige zijden van het grondvlak als de afstanden van snij- en grondvlak tot de top. Hieruit volgt dat de oppervlakten van het snij- en grondvlak zich verhouden als de kwadraten van hun afstanden tot de top. De doorsneden van 2 piramiden met gelijke hoogten en even grote grondvlakken zijn dus ook gelijk.

Een **regelmatig veelvlak** wordt gedefinieerd als een veelvlak waarvan alle zijvlakken congruente regelmatige veelhoeken zijn en alle tweevlakshoeken gelijk zijn.

Er zijn 5 verschillende regelmatige veelvlakken, t.w.:
1. **tetraëder**: aan elk hoekpunt komen 3 gelijkzijdige driehoeken samen.
2. **hexaëder**: aan elk hoekpunt komen 3 vierkanten samen.
3. **oktaëder**: aan elk hoekpunt komen 4 gelijkzijdige driehoeken samen.
4. **dodekaëder**: aan elk hoekpunt komen 3 regelmatige vijfhoeken samen.
5. **ikosaëder**: aan elk hoekpunt komen 5 gelijkzijdige driehoeken samen.



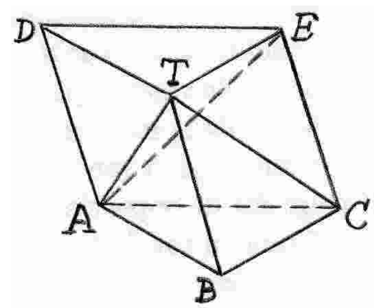
De **inhoudseenheid** wordt gedefinieerd als een kubus met ribbe 1.

De inhoud I van een rechthoekig blok met ribben a, b en c wordt nu gedefinieerd als:

$$\boxed{I_{blok} = abc}$$

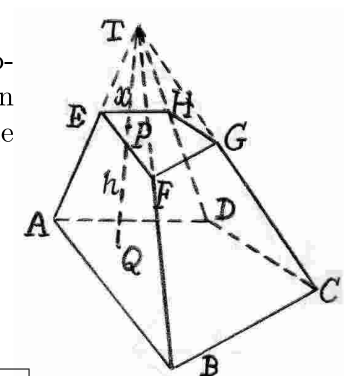
Voor elk prisma geldt dat de inhoud gelijk is aan het produkt van de oppervlakte van het grondvlak G en de hoogte h:

$$\boxed{I_{prisma} = Gh}$$



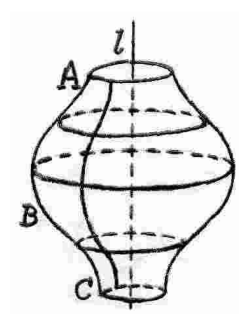
Als $TABCD$ een driezijdige piramide is en $AD \parallel BT \parallel CE$, met $AD = BT = CE$, dan ontstaat een driezijdig prisma met TDE als bovenvlak. TDE wordt door vlak TAC verdeeld in een 3-zijdige en een 4-zijdige piramide, waarvan de laatste door vlak TAC weer in 2 driezijdige piramiden wordt verdeeld. Daar de inhou7d van de 3 piramiden gelijk is, volgt uit $I_{prisma} = GH$ voor de inhoud van een driezijdige piramide: $I = \frac{1}{3}GH$
Daar elke piramide te verdelen is in driezijdige piramiden, geldt algemeen voor de inhoud van een willekeurige piramide:

$$\boxed{I_{piramide} = \tfrac{1}{3}Gh}$$



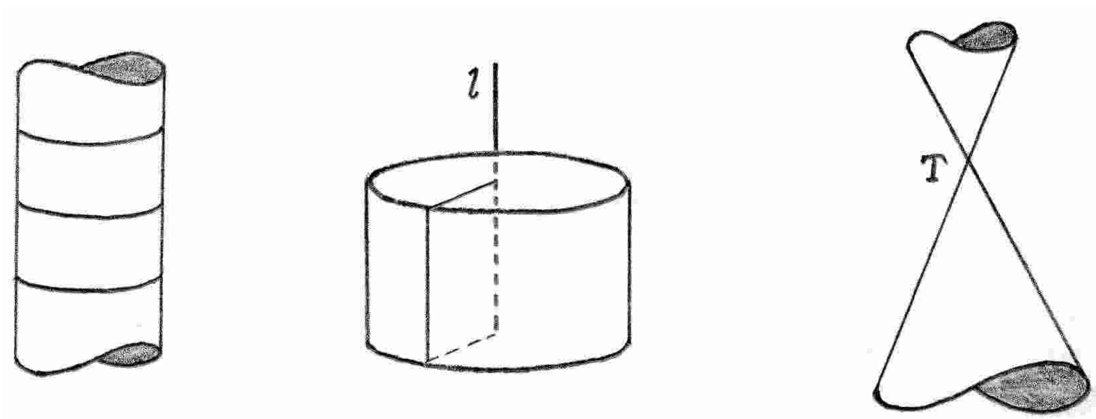
Als $ABCDEFGH$ een *afgeknotte* piramide is met hoogte h, oppervlakte grondvlak en bovenvlak G resp. B, en $TABCD$ een piramide met hoogte $TQ = TP + PQ = x + h$, dan geldt voor de inhoud van $ABCDEFGH$:
$I = \frac{1}{3}(x+h)G - \frac{1}{3}xB = \frac{1}{3}[hG + x(G - B)]$
Tevens geldt: $x^2 : (x+h)^2 = B : G \to x : x + h = \sqrt{B} : \sqrt{G} \Leftrightarrow$
$$x = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} \to$$

$$\boxed{I_{afgeknotte\ piramide} = \tfrac{1}{3}h(G + B + \sqrt{GB})}$$



Een **omwentelingsoppervlak** wordt gedefinieerd als het oppervlak dat ontstaat als een lijn ABC, de zgn. *beschrijvende lijn*, om en gegeven rechte lijn l wentelt. De doorsnede van een omwentelingsoppervlak met een vlak loodrecht op l is een cirkel, de zgn. *parallelcirkel*, met het middelpunt op l.
Een **omwentelingscilinder** wordt gedefinieerd als het oppervlak dat ontstaat als een rechte lijn parallel aan l rondwentelt. Een **cirkelcilinder** ontstaat als 2 cirkelvlakken als grond- en bovenvlak worden aangebracht.
Een **omwentelingskegel** wordt gedefinieerd als het oppervlak dat ontstaat als een rechte lijn die lijn l snijdt rond l wentelt. Het snijpunt verdeelt het kegelvlak in 2 congruente bladen.

Een **cirkelkegel** met top T ontstaat als in 1 van de bladen een cirkelvlak als grondvlak wordt aangebracht. Een *afgeknotte* cirkelkegel ontstaat door snijding van de cirkelkegel met een plat vlak evenwijdig met het grondvlak.



Daar een cilinder is op te vatten als de limiet van een regelmatig recht prisma waarvan het aantal zijden naar oneindig nadert, is de zijdelingse oppervlakte van een cilinder gelijk aan het produkt van de oppervlakte van het grondvlak en de hoogte. Voor een cilinder met straal r en hoogte h geldt dus:

$$\boxed{O_{x,cilinder} = 2\pi r h}$$

Analoog geldt voor de inhoud van een cilinder:

$$\boxed{I_{cilinder} = \pi r^2 h}$$

Daar een kegel is op te vatten als de limiet van een regelmatige piramide waarvan het aantal zijden naar oneindig nadert, is de zijdelingse oppervlakte van een kegel gelijk aan de som van de oppervlakten van de driehoeken van de piramide, d.w.z. gelijk aan het produkt van de helft van de omtrek van het grondvlak en het apothema van elke driehoek. Voor een kegel met straal r en apothema a geldt dus:

$$\boxed{O_{x,kegel} = \pi r a}$$

Analoog geldt voor de inhoud van een kegel:

$$\boxed{I_{kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

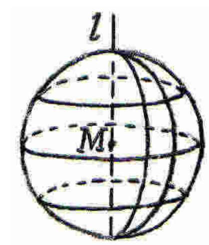
Daar een afgeknotte kegel is op te vatten als de limiet van een afgeknotte reglmatige piramide waarvan het aantal zijden naar oneindig nadert, is de zijdelingse oppervlakte van een afgeknotte kegel gelijk aan de som van de trapeziums van de piramide, d.w.z. gelijk aan het produkt van de helft van de som van de omtrek van het grond- en bovenvlak en het apothema van elk trapezium. Voor een afgeknotte kegel met stralen R en r en apothema a geldt dus:

$$\boxed{O_{x,afgeknotte\ kegel} = \pi(R + r)a}$$

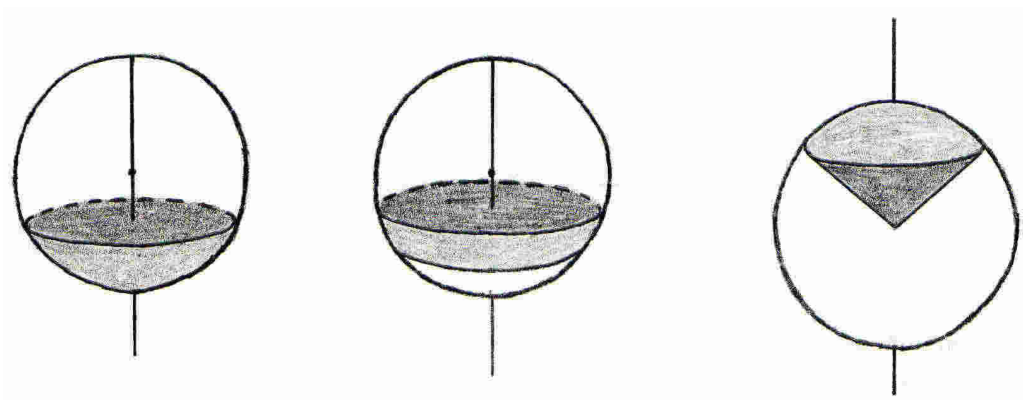
Analoog geldt voor de inhoud van een afgeknotte kegel, met $G = \pi R^2$ en $B = \pi r^2$:

$$\boxed{I_{afgeknotte\ kegel} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)}$$

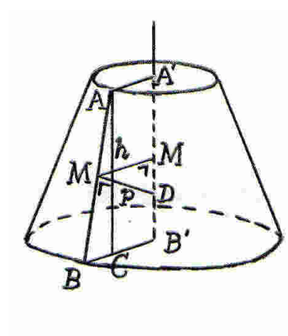
Een **bol** wordt gedefinieerd als het omwentelingsoppervlak dat ontstaat als een halve cirkel met uiteinden behorende tot l rond l wentelt. Elk punt van het boloppervlak ligt op dezelfde afstand van het middelpunt M van de halve cirkel. Een *grote cirkel* is elke cirkel die ontstaat bij de afsnijding van het boloppervlak met een plat vlak V dat door M gaat. Als V niet door M gaat, dan is de doorsnede een *kleine cirkel*.



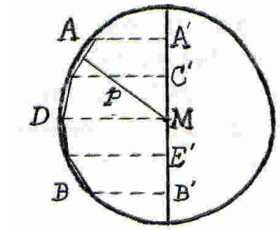
Als een plat vlak een bol afsnijdt, dan verdeelt het de bol in 2 delen die elk een **bolsegment** vormen met een gemeenschappelijke cirkelvormige basis. Als 2 evenwijdige vlakken een bol snijden dan ontstaat een **bolschijf**. Een **bolsector** bestaat uit een bolsegment en een kegel met de top in het middelpunt van de bol. Een **bolschil** ontstaat als een cirkelsegment om een middellijn van de bijbehorende cirkel, die het segment niet snijdt, wordt gewenteld.



Voor de zijdelingse oppervlakte van de afgeknotte kegel AA”$B'B$ met $BM = MA$ en $MM' \perp A'B'$ geldt:
$O_z = \pi(AA' + BB')AB = 2\pi MM'.AB$
$AC \perp BB' \wedge DM \perp AB \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle MM'D \rightarrow$
$AC : MM' = AB : MD \Leftrightarrow h : MM' = AB : p \rightarrow$
$O_{z,afgeknotte\ kegel} = 2\pi ph$



De oppervlakte van een bolschijf is te benaderen als de som van de oppervlakten van een aantal afgeknotte kegels:
$O_{bolschijf} \approx 2\pi p(A'C' + C'M + ME' + E'B') = 2\pi pA'B'$
Als het aantal kegels naar het oneindige nadert, dan nadert de loodlijn DM naar de straal R van de bolschijf en de som van de oppervlakten van de afgeknotte kegels naar de oppervlakte van een bolschijf met hoogte h:



$$\boxed{O_{bolschijf} = 2\pi Rh}$$

Daar bij een bolsegment punt A met punt P samenvalt, geldt dezelfde uitkomst voor de oppervlakte van een bolsegment:

$$\boxed{O_{bolsegment} = 2\pi Rh}$$

Als $bgAB = bgPDQ$, dan geldt dat $h = PQ = 2R \rightarrow$

$$\boxed{O_{bol} = 4\pi R^2}$$

De oppervlakte van een bolsector is gelijk aan de som van de oppervlakten van de kegel en het op het grondoppervlak daarvan staande bolsegment:
$O_{bolsector} = O_{kegel} + O_{bolsegment} = \pi rR + 2\pi Rh \rightarrow$

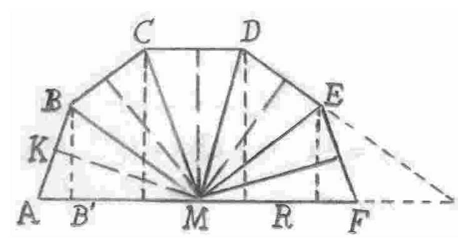
$$\boxed{O_{bolsector} = \pi R(r + 2h)}$$

Hierin is R de straal van de bijbehorende bol, r de straal van het grondvlak en h de hoogte van het bolsegment.

De oppervlakte van een bolschil is gelijk aan de som van de oppervlakten van de bolschijf en de hierbinnen liggende afgeknotte kegel: $O_{bolschil} = O_{bolschijf} + O_{afgeknotte\ kegel} \rightarrow$

$$\boxed{O_{bolschil} = 2\pi Rh + \pi(a + b)k}$$

Hierin is R de straal van de bijbehorende bol, h de hoogte van de bolschijf en de afgeknotte kegel, k de lengte van het apothema en a en b de straal van het boven- resp. grondvlak van de kegel.

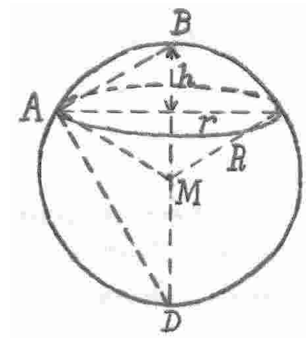


Als de halve regelmatige veelhoek $ABCDEF$ om de lijn $AF = 2R$ wentelt, dan is de inhoud van het omwentelingslichaam gelijk aan de som van de inhouden van kegels en cilinders. Zo geldt voor de inhoud van de kegel die ontstaat door wenteling van $\triangle ABM$:
$I = \frac{1}{3}\pi(BB')^2 AB' + \frac{1}{3}\pi(BB')^2 B'M = \frac{1}{3}\pi(BB')^2 AM$
$O_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AM.BB' = \frac{1}{2}AB.MK \rightarrow$
$BB'.AM = MK.AB \rightarrow$
$I = \frac{1}{3}\pi MK.AB.BB' = \frac{1}{3}MK\times$ ronde oppervlak van AB
Algemeen geldt dat de inhoud van elk omwentelingslichaam rond AF gelijk is aan $\frac{1}{3}MK\times$ ronde oppervlak van het lichaam.
Als het aantal zijden van de veelhoek naar oneindig nadert, dan nadert de veelhoek tot een cirkel met straal $MK = R$ en het omwentelingsoppervlak nadert tot een bol $\rightarrow$
$I_{bol} = \frac{1}{3}R.4\pi R^2 \rightarrow$

$$\boxed{I_{bol} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Voor een bolsector wordt het ronde oppervlak gevormd door wenteling van boog AB, waarvan het oppervlak gelijk is aan $2\pi Rh \rightarrow I_{bolsector} = \frac{1}{3}R.2\pi Rh \rightarrow$

$$\boxed{I_{bolsector} = \tfrac{2}{3}\pi R^2 h}$$

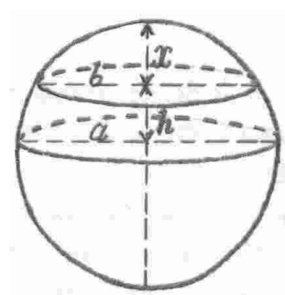


De inhoud van een bolsegment met hoogte h en straal van het grondvlak r is gelijk aan het verschil van de inhoud van de bolsector met straal R en de kegel met apothema R.
In $\triangle ABD$ geldt: $(AB)^2 + (AD)^2 = (BD)^2 \Leftrightarrow$
$r^2 + h^2 + r^2 + (2R-h)^2 = 4R^2 \Leftrightarrow r^2 = h(2R-h) \rightarrow$
$I_{bolsegment} = I_{bolsector} - I_{kegel} = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2(R-h) \Leftrightarrow$
$I_{bolsegment} = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h(2R-h)(R-h) \rightarrow$

$$\boxed{I_{bolsegment} = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3R-h)}$$

Substitutie van $R = \dfrac{r^2+h^2}{2h}$ geeft: $I_{bolsegment} = \frac{1}{3}\pi h^2 \left\{\dfrac{3r^2+3h^2}{2h} - h\right\} \rightarrow$

$$\boxed{I_{bolsegment} = \tfrac{1}{2}\pi h(r^2 + \tfrac{1}{3}h^2)}$$



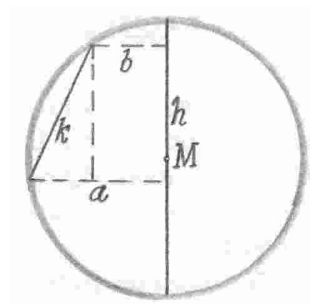
De inhoud van een bolschijf met hoogte h en straal van het grond- en bovenvlak van a resp. b is gelijk aan het verschil van de inhoud van de 2 bolsegmenten:
$I_{bolschijf} = \frac{1}{2}\pi a^2(h+x) + \frac{1}{6}\pi(h+x)^3 - \frac{1}{2}\pi b^2 x - \frac{1}{6}\pi x^3 \Leftrightarrow$
$I_{bolschijf} = \frac{1}{2}\pi\{a^2(h+x) - b^2x\} + \frac{1}{6}\pi h\{(h+x)^2 + x(h+x) + x^2\}$
<u>Stel</u>: $x + \frac{1}{2}h = y$ en $\frac{1}{2}h = p \rightarrow h + x = y + p$ en $x = y - p \rightarrow$
$I_{bolschijf} = \frac{1}{2}\pi[a^2(y+p) - b^2(y-p)] + \frac{1}{6}\pi h[(y+p)^2 + (y-p)(y+p) + (y-p)^2] \Leftrightarrow$
$I_{bolschijf} = \frac{1}{2}\pi[(a^2+b^2)p + (a^2-b^2)y + hy^2 + \frac{1}{3}hp^2]$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = x(2R-x) \Leftrightarrow 2R = \dfrac{b^2+x^2}{x} \\[2em] a^2 = (h+x)[2R-(h+x)] \Leftrightarrow 2R = \dfrac{a^2+(h+x)^2}{h+x} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{b^2+x^2}{x} = \frac{a^2+(h+x)^2}{h+x} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{b^2}{x} = h + \dfrac{a^2}{h+x} \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{y-p} = h + \dfrac{a^2}{y+p} \Leftrightarrow hy^2 + (a^2-b^2)y = hp^2 + (a^2+b^2)p \rightarrow$
$I_{bolschijf} = \frac{1}{2}\pi[(a^2+b^2)p + hp^2 + (a^2+b^2)p + \frac{1}{3}hp^2]$
Substitutie van $p = \frac{1}{2}h$ geeft dan:

$$\boxed{I_{bolschijf} = \tfrac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{3}h^2)}$$

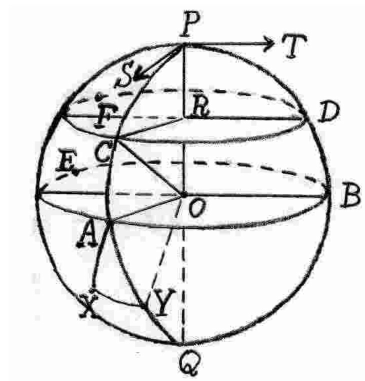
De inhoud van een bolschil is gelijk aan het verschil van de inhoud van een bolschijf en een afgeknotte kegel met gelijke grond- en bovenvlakken van a resp. b en hoogte $h \rightarrow$



$I_{bolschil} = I_{bolschijf} - I_{afgeknotte\ kegel} \Leftrightarrow$
$I_{bolschil} = \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2 + \frac{1}{3}h^2) - \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow$
$I_{bolschil} = \frac{1}{6}\pi h[(a-b)^2 + h^2]$
Substitutie van $k^2 = (a-b)^2 + h^2$ geeft:

$$\boxed{I_{bolschil} = \frac{1}{6}\pi h k^2}$$

Boldriehoeksmeetkunde

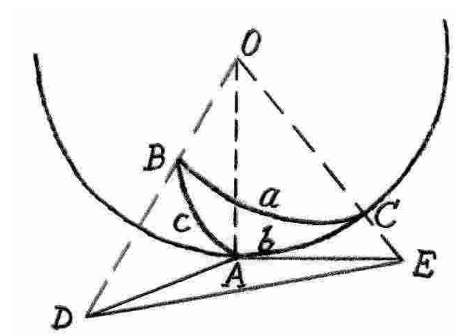


Als PQ de diameter van een bol met middelpunt O is die loodrecht staat op het vlak bepaalt door de grote cirkel EAB, dan staat PQ ook loodrecht op het vlak bepaalt door de kleine cirkel FCD die parallel is met cirkel EAB. De **bolhoek** SPT tussen de *grote* cirkels $PCAQ$ en $PDBQ$ in punt P wordt gedefinieerd als de hoek tussen de raaklijn PT aan boog $PDBQ$ en de raaklijn PS aan boog $PCAQ$. Daar $PT \parallel OB$ en $PS \parallel OA$, geldt: $\angle SPT = \angle AOB$

Een **boldriehoek** wordt gedefinieerd als 3 punten die op 1 bolhelft liggen en verbonden zijn door delen van grote cirkels.
Als R de straal van de bol is, dan geldt voor de lengte van de grote cirkelboog AY:
boog $AY = R.\angle AOY$
Hierin wordt $\angle AOY$ uitgedrukt in radialen. Daar voor elke grote cirkel R constant is, kan $R = 1$ genomen worden. $\rightarrow$ boog $AY = \angle AOY$

Daar het vlak van FCD papallel is aan het vlak van EAB geldt: $\angle CRD = \angle AOB \rightarrow$
$CD = \dfrac{RC}{OA}.AB = \dfrac{RC}{OC}.AB = AB\cos RCO = AB\cos AOC = AB\cos AC$
Daar $PA = 90°$, geldt voor de lengte van een kleine cirkelboog:

$$\boxed{CD = AB\cos AC = AB\sin PC}$$



Als in boldriehoek ABC AD de raaklijn in A is aan de grote cirkel AC en AE de raaklijn in A aan de grote cirkel AC, dan staat OA loodrecht op AD en AE.
Er geldt dan: bolhoek $BAC = \angle DAE \equiv qA$
$\angle OAD = 90°$ en $\angle AOD = \angle AOB = c \rightarrow$
$\tan c = \dfrac{AD}{OA}$ en $\sec c = \dfrac{OD}{OA}$
$\angle OAE = 90°$ en $\angle AOE = \angle AOC = b \rightarrow$
$\tan b = \dfrac{AE}{OA}$ en $\sec c = \dfrac{OE}{OA}$
In $\triangle DAE$ geldt: $DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD.AE\cos DAE \Leftrightarrow$
$DE^2 = OA^2(\tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan b\tan c\cos A)$
In $\triangle DOE$ geldt: $DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE\cos DOE \Leftrightarrow$
$DE^2 = OA^2(\sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec b\sec c\cos a)$
Gelijkstellen geeft: $\sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec b\sec c\cos a = \tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan b\tan c\cos A \Leftrightarrow$
$1 + \tan^2 c + 1 + \tan^2 b - 2\sec b\sec c\cos a = \tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan b\tan c\cos A \Leftrightarrow$
$\sec b\sec c\cos a = 1 + \tan b\tan c\cos A = \dfrac{\cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A}{\cos b\cos c}$
Analoog voor $\cos b$ en $\cos c$. $\rightarrow$

Cosinusformules:

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{array}}$$

Uit $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ volgt:

$$\boxed{\cos A = \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c(\cos a - \cos b \cos c)}$$

Analoge formules gelden voor $\cos B$ en $\cos C$.

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c(1 - \sin^2 \frac{1}{2}A) = \cos(b-c) - 2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A \Leftrightarrow$
$\cos(B-c) - \cos a = 2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A \Leftrightarrow$
$-\sin \frac{1}{2}[(b-c)+a] \sin \frac{1}{2}[(b-c)-a] = \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A \Leftrightarrow$
$\sin \frac{1}{2}[a+(b-c)] \sin \frac{1}{2}[a-(b-c)] = \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A$
<u>Stel</u>: $2s = a+b+c \rightarrow \sin(s-c)\sin(s-b) = \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A \rightarrow$

$$\boxed{\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}}$$

Analoge formules gelden voor $\sin \frac{1}{2}B$ en $\sin \frac{1}{2}C$.

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c(2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1) = \cos(b+c) + 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2}A \Leftrightarrow$
$\cos(b+c) - \cos a = -2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2}A \Leftrightarrow$
$\sin \frac{1}{2}[(b+c)+a] \sin \frac{1}{2}[(b+c)-a] = \sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2}A \Leftrightarrow \sin s \sin(s-a) = \sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2}A \rightarrow$

$$\boxed{\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}}$$

Analoge formules gelden voor $\cos \frac{1}{2}B$ en $\cos \frac{1}{2}C$.

Uit $\sin \frac{1}{2}A$ en $\cos \frac{1}{2}A$ volgt:

$$\boxed{\tan \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}}$$

Analoge formules gelden voor $\tan \frac{1}{2}B$ en $\tan \frac{1}{2}C$.

$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c \leftrightarrow$
$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$
$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \Leftrightarrow$
$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = (1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \Leftrightarrow$
$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \rightarrow$
$1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c \Leftrightarrow$
$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c_2 \cos a \cos b \cos c$
<u>Stel</u>: $X^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c_2 \cos a \cos b \cos c \rightarrow$

$X^2 = \dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 a} \Leftrightarrow X = \pm \dfrac{\sin A}{\sin a}$

Tevens geldt: $\forall_{0<\theta<180^\circ} : \sin\theta > 0 \rightarrow X = \dfrac{\sin A}{\sin a}$

Analoog geldt: $X = \dfrac{\sin B}{\sin b}$ en $X = \dfrac{\sin C}{\sin c} \rightarrow$

Sinusformule:

$$\boxed{\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}}$$

$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c \cos a = \cos b - \cos c(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \Leftrightarrow$
$\sin c \sin a \cos B = \cos b \cos^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A \Leftrightarrow$
$\sin c \sin a \cos B = \cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A \rightarrow$

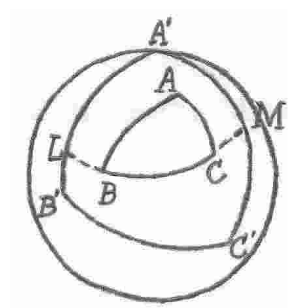
$$\boxed{\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}$$

Analoog geldt:

$$\boxed{\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A}$$

Substitutie van $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ geeft:
$\cos b = \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin c \sin a \cos B \Leftrightarrow$
$\cos b = (1 - \sin^2 a) \cos b + \sin a \sin b \cos a \cos C + \sin c \sin a \cos B \Leftrightarrow$
$\cos b \sin^2 a = \sin a \sin b \cos a \cos C + \sin c \sin a \cos B \Leftrightarrow$
$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \dfrac{\sin c}{\sin b} \cos B \rightarrow$

$$\boxed{\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B}$$



Als ABC een boldriehoek is en A' is de pool van BC, B' de pool van AC en C' de pool van AB, dan is de bolhoek $B'A'C'$ gelijk aan boog LM. Daar B' de pool van AC is, is de afstand van B' tot elk punt van boog AV gelijk aan $90°$; analoog voor de afstand van A' tot boog BC. $\rightarrow$

De afstand van C tot boog $A'B'$ is $90°$, d.w.z. C is de pool van $A'B'$, ofwel boog CL is $90°$.
Analoog geldt dat boog $BM = 90° \rightarrow LM = LB + BM = LB + 90°$
$LB = LC - BC = 90° - a \rightarrow B'A'C' \equiv A' = LB + 90° = 90° - a + 90° = 180° - a$
Analoog geldt: $B' = 180° - b$ en $C' = 180° - c$
Tevens geldt voor de zijden: $a' = 180° - A \wedge b' = 180° - B \wedge c' = 180° - C$
In boldriehoek $A'B'C'$ geldt: $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A' \rightarrow$
$\cos(180° - A) = \cos(180° - B)\cos(180° - C) + \sin(180° - B)\sin(180° - C)\cos(180° - a) \rightarrow$

Poolformule:

$$\boxed{-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a}$$

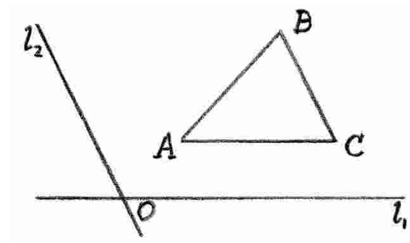
Voor de som en het verschil van de zijden a en b resp. de hoeken A en B gelden de

Identiteiten van Napier:

$$\boxed{\begin{aligned}
\tan \tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \tan \tfrac{1}{2}c \\[2ex]
\tan \tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \tan \tfrac{1}{2}c \\[2ex]
\tan \tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}C \\[2ex]
\tan \tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}C
\end{aligned}}$$

Analytische Meetkunde

Een **Cartesisch coördinatenstelsel** is een coördinatenstelsel waarbij de coördinaatassen dezelfde schaalverdeling bezitten. Als de assen loodrecht op elkaar staan, dan heet het stelsel **rechthoekig**. De X-as heet de **abscis** en de Y-as de **ordinaat**.
In $\triangle ABC$ geldt: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos(\pi - \theta) \rightarrow$



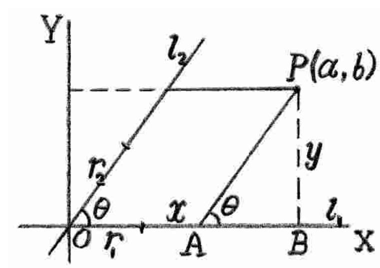
$$\boxed{|AB|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\cos\theta}$$

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow$

$$\boxed{|AB|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Als r_1 en r_2 de eenheidsafstand is langs l_1 resp. l_2 en $\angle(l_1, l_2) = \theta$, dan geldt:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AP}\cos\theta \\ y = \overline{BP} = \overline{AP}\sin\theta \end{array} \right\} \rightarrow$$



$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = r_1 a + r_2 b\cos\theta \\ y = r_2 b\sin\theta \end{array} \right.}$$

In een 3-dimensionaal Cartesisch coördinatenstelsel geldt analoog voor de afstand tussen 2 punten $P(x_0, y_0, z_0)$ en $Q(x_1, y_1, z_1)$:

$$\boxed{|PQ|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Een 3-dimensionale vector $\vec{n}$ wordt gedefinieerd als een geordend tripel van reële getallen $n_1, n_2, n_3 : \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$
De som resp. het verschil van 2 vectoren $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ en $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{m} \pm \vec{n} = (m_1 \pm n_1, m_2 \pm n_2, m_3 \pm n_3)}$$

De vermenigvuldiging van een vector $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ met een reëel getal λ wordt gedefinieerd als:

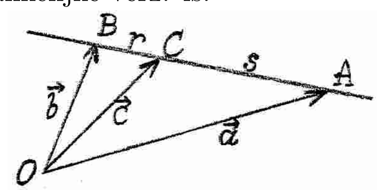
$$\boxed{\lambda\vec{n} = (\lambda n_1, \lambda n_2, \lambda n_3) \mid \lambda \in I\!R}$$

Als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ 2 vectoren in het platte vlak V zijn, met $\vec{a}$ en $\vec{b}$ niet nul en $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, dan is elke vector $\vec{c}$ te schrijven als een lineaire combinatie van $\vec{a}$ en $\vec{b} : \vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b} \mid r, s \in I\!R$
Hierin zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ de **basisvectoren** in V.
Analoog geldt in de ruimte voor 3 vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ die niet in 1 vlak liggen:
$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \mid r, s, t \in I\!R$

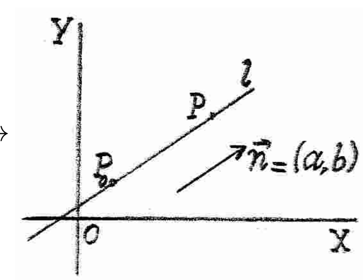
Een verz. van n vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vormt een verz. van **lineair onafhankelijke vectoren** als uit $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_n\vec{a}_n = \vec{0}$ volgt dat $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$. Als er reële

getallen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bestaan die niet alle nul zijn zo, dat $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_n\vec{a}_n = \vec{0}$, dan vormen de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ een verz. **lineair afhankelijke vectoren**.
Algemeen geldt dat elke vector slechts op 1 unieke manier te schrijven is als een lineaire functie van $\{A\} : \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, als $\{A\}$ een lineaire onafhankelijke verz. is.

Als de eindpunten A, B en C van 3 vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ resp. $\vec{c}$ op 1 lijn liggen, met $\overline{BC} : \overline{AC} = r : s \mid r + s = 1$, dan geldt: $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{b} + r\vec{BA} \Leftrightarrow$ $\vec{c} = \vec{b} + r(\vec{OA} - \vec{OB}) = \vec{b} + r(\vec{a} - \vec{b}) \rightarrow$



$$\boxed{\vec{c} = r\vec{a} + (1 - r)\vec{b} \mid r \in I\!R}$$



Stel: $P_0(x_0, y_0)$ en $P(x, y)$ zijn punten van de lijn $l \parallel \vec{n} = (a, b) \rightarrow$

$$\boxed{l : \vec{P_0P} = \lambda\vec{n} \mid \lambda \in I\!R}$$

$(x - x_0, y - y_0) = \lambda(a, b) \Leftrightarrow x - x_0 = \lambda a \wedge y - y_0 = \lambda b \rightarrow$

$$\boxed{l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}}$$

$l \not\parallel X$-as, Y-as $\Rightarrow \lambda = (x - x_0)/a \ \wedge \ \lambda = (y - y_0)/b \rightarrow$

$$\boxed{l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}}$$

Stel: $P_0(x_0, y_0)$ en $P(x, y)$ zijn punten van de lijn $l \perp \vec{n} = (a, b) \rightarrow$
$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = a(x - x_0) + b(y - y_0) \rightarrow$

$$\boxed{l : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

Voor de vergelijking van een rechte lijn l door de punten $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ en $P(x, y)$ geldt:
$\vec{OP} = \lambda\vec{OA} + (1 - \lambda)\vec{OB} \Leftrightarrow (x, y) = \lambda(x_0, y_0) + (1 - \lambda)(x_1, y_1) \rightarrow$

$$\boxed{l : \begin{cases} x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 \\ y = \lambda y_0 + (1 - \lambda)y_1 \end{cases}}$$

$l \not\parallel X$-as,Y-as $\Rightarrow \lambda = (x - x_1)/(x_0 - x_1) \ \wedge \ \lambda = (y - y_1)/(y_0 - y_1) \rightarrow$

$$\boxed{l : \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}}$$

Stel: $x_1 = x_0 \wedge y_1 = y_0 \rightarrow y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Substitutie van $\tan\varphi = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m$ geeft:

$$\boxed{l : y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Voor de algemene vergelijking van een rechte lijn in het platte vlak geldt:

$$\boxed{l : ax + by + c = 0 \mid a, b, c \in \mathbb{R}}$$

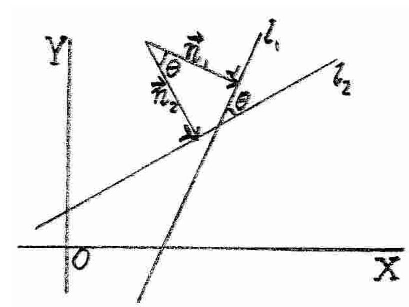
Voor $a \neq 0$ en $b \neq 0$ volgt hieruit:

$$\boxed{l : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \;\Big|\; \tan\varphi = -\frac{a}{b}}$$

Stel: $\vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \wedge \vec{CD} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_0)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_0)(y_3 - y_2) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1 \rightarrow$

$$\boxed{\vec{AB} \perp \vec{CD} \Rightarrow m_{\vec{AB}} m_{\vec{CD}} = -1}$$

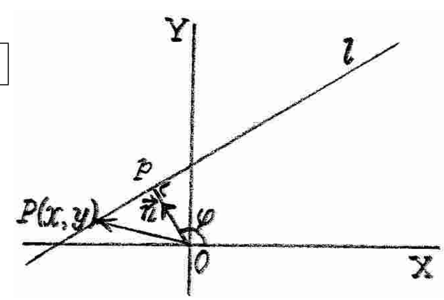


Stel: $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ snijdt $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \rightarrow$
$\angle(l_1, l_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \theta \mid \vec{n}_1 = (a_1, b_1) \perp l_1 \wedge \vec{n}_2 = (a_2, b_2) \perp l_2$
$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1||\vec{n}_2| \cos\theta \rightarrow$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \rightarrow$

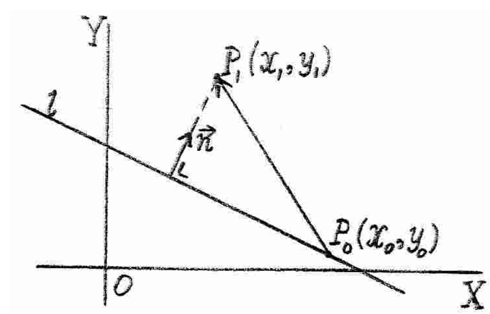
$$\boxed{l_1 \perp l_2 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0}$$



Stel: $\vec{n} \perp l \mid |\vec{n}| = 1 \wedge \angle(\vec{n}, X\text{-as}) = \varphi \rightarrow$
$\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \rightarrow$
$\vec{OP} \cdot \vec{n} = (x, y) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) = x\cos\varphi + y\sin\varphi \Leftrightarrow$
$\vec{OP} \cdot \vec{n} = |\vec{OP}| = p \rightarrow$

Normaalvergelijking van een rechte lijn:

$$\boxed{l : x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$$



Stel: $P_0(x_0, y_0) \in l : ax + by + c = 0 \wedge \vec{n} \perp l \mid |\vec{n}| = 1 \rightarrow$

$|\vec{P_0P_1} \cdot \vec{n}| = \left|(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right| \Leftrightarrow$

$|\vec{P_0P_1} \cdot \vec{n}| = \frac{|ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$p_0 \in l \rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \rightarrow$

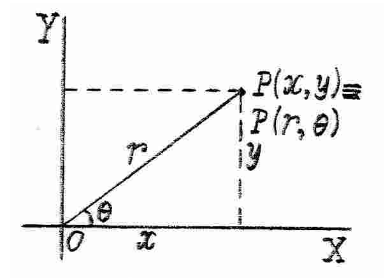
$$\boxed{d(P_1(x_1, y_1), l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Analoog geldt voor de afstand tusssen 2 parallelle lijnen $l_1 : ax + by + c_1 = 0$ en $l_2 : ax + by + c_2 = 0$:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Voor het verband tussen Cartesische - en poolcoördinaten geldt:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

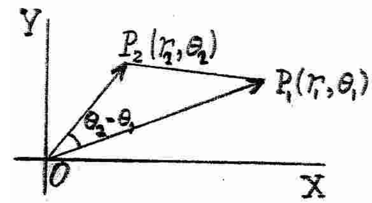


Hieruit volgt voor r, θ als functie van x, y:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$

Voor de afstand tussen 2 punten $P_1(r_1, \theta_1)$ en $P_2(r_2, \theta_2)$ geldt:
$|P_1P_2|^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2|OP_1||OP_2|\cos(\theta_2 - \theta_1) \rightarrow$

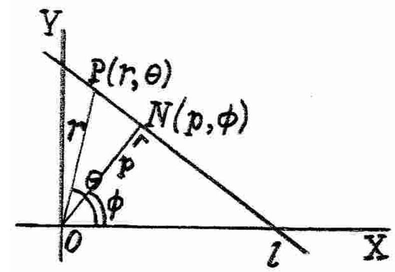
$$|P_1P_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$



Stel: $\left.\begin{array}{l} N(p,\phi) \text{ en } P(r,\theta) \text{ zijn punten van lijn } l \\ d(O,l) = p \end{array}\right\} \rightarrow$

Poolvergelijking van een rechte lijn:

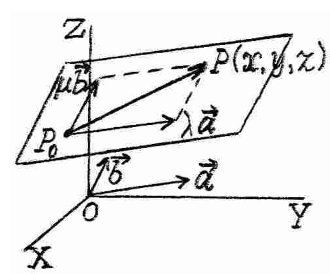
$$l : r\cos(\theta - \phi) = p$$



$O \in l \Rightarrow p = 0 \rightarrow \cos(\theta - \phi) = 0 \rightarrow$

$$l : \theta = k \mid k \in I\!R$$

Als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ 2 niet-parallelle vectoren zijn en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ is een punt van een vlak V parallel aan het vlak opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$, dan geldt: $\vec{P_0P} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \rightarrow$



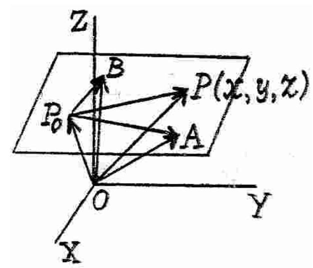
Vergelijking van een vlak:

$$V : \vec{OP} = \vec{OP_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \mid \lambda, \mu \in I\!R$$

In parametervorm is dit te schrijven als:

$$V : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Stel: $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $A(x_1,y_1,z_1)$ en $B(x_2,y_2,z_2)$ zijn 3 niet op 1 lijn liggende punten in $P(x,y,z)$ is een willekeurig punt van het vlak gevormd door $P_0AB \rightarrow$

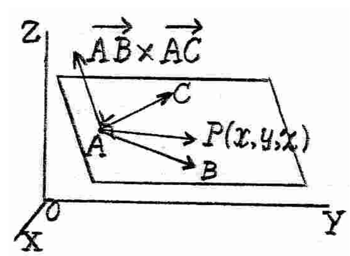


$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \lambda\overrightarrow{P_0A} + \mu\overrightarrow{P_0B} \Leftrightarrow$
$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \lambda(\vec{OA} - \vec{OP_0}) + \mu(\vec{OB} - \vec{OP_0}) \rightarrow$

$$\boxed{V : \vec{OP} = (1-\lambda-\mu)\vec{OP_0} + \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB} \mid \lambda,\mu \in I\!R}$$

In parametervorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{V : \begin{cases} x = (1-\lambda-\mu)x_0 + \lambda x_1 + \mu x_1 \\ y = (1-\lambda-\mu)y_0 + \lambda y_1 + \mu y_1 \\ z = (1-\lambda-\mu)z_0 + \lambda z_1 + \mu z_1 \end{cases}}$$



Als $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ en $C(x_3,y_3,z_3)$ 3 niet op 1 lijn liggende punten zijn, dan geldt dat $\vec{AB} \times \vec{AC}$ loodrecht staat op vlak V opgespannen door A, B en $C \rightarrow$
$\vec{AP} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \cdot [(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \times (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)] = 0 \rightarrow$

$$\boxed{V : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Stel: $P_0(x_0,y_0,z_0)$ is een punt van vlak V met $\vec{n} = (a,b,c) \perp V \rightarrow$
$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0 \Leftrightarrow (a,b,c) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0 \rightarrow$

$$\boxed{V : a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$$

Stel: $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d \rightarrow$

$$\boxed{V : ax + by + cz + d = 0}$$

Stel: $\left.\begin{array}{l} V_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ snijdt } V_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ onder hoek } \theta \\ \vec{n}_1 = (a_1,b_1,c_1) \perp V_1 \text{ en } \vec{n}_2 = (a_2,b_2,c_2) \perp V_2 \end{array}\right\} \rightarrow$

$|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\theta \rightarrow$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

Stel: $P_0(x_0,y_0,z_0) \in V : ax + by + cz + d = 0 \wedge \vec{n} \perp V \mid |\vec{n}| = 1 \rightarrow$

$$|\vec{P_0P} \cdot \vec{n}| = \left|(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\right| \Leftrightarrow$$

$$|\vec{P_0P} \cdot \vec{n}| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$P_0 \in V \rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \rightarrow$

$$\boxed{d(P_1(x_1, y_1, z_1), V) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Analoog voor de afstand tussen 2 parallelle vlakken $V_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ en $V_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$:

$$\boxed{d(V_1, V_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Als $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en $P(x, y, z)$ punten van een lijn $l \parallel \vec{n} = (a, b, c)$ zijn, dan geldt analoog aan het platte vlak:

$$\boxed{l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}}$$

Als $l \not\parallel X$-as, Y-as, Z-as, dan is l te schrijven als:

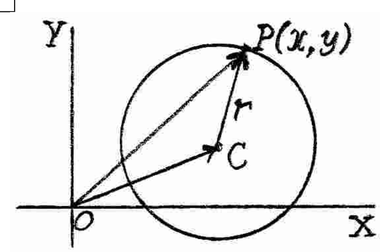
$$\boxed{l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Analoog aan het platte vlak geldt voor de lijn door de punten $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_2, z_2)$ en $P(x, y, z)$:

$$\boxed{l : \begin{cases} x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 \\ y = \lambda y_0 + (1 - \lambda)y_1 \\ z = \lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1 \end{cases}}$$

Als $l \not\parallel X$-as, Y-as, Z-as, dan is l te schrijven als:

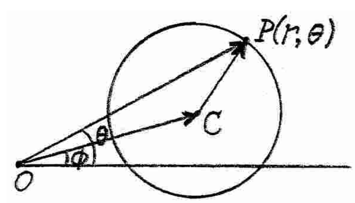
$$\boxed{l : \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_z}{z_0 - z_1}}$$



Voor een cirkel met MP $C(x_0, y_0)$ en straal r geldt:
$\vec{CP} \cdot \vec{CP} = r^2 \Leftrightarrow$
$(x - x_0, y - y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = r^2 \rightarrow$

Vergelijking van een cirkel:

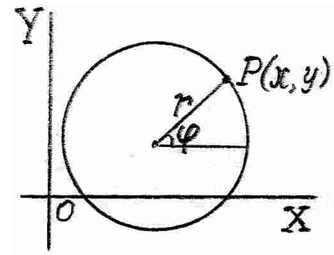
$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$



Als $P(r, \theta)$ een punt is van een cirkel met MP $C(r_1, \phi)$ en straal a, dan geldt: $\vec{OP} - \vec{OC} = \vec{CP} \rightarrow$
$(\vec{OP} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OC}) = \vec{CP} \cdot \vec{CP} \Leftrightarrow$
$\vec{OP} \cdot \vec{OP} + \vec{OC} \cdot \vec{OC} - 2\vec{OP} \cdot \vec{OC} = \vec{CP}\vec{CP} \Leftrightarrow |\vec{OP}|^2 + |\vec{OC}|^2 - 2|\vec{OP}||\vec{OC}| \cos(\theta - \phi) = |\vec{CP}|^2 \rightarrow$

Poolvergelijking van een cirkel:

$$\boxed{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \phi) = a^2}$$



MP= $O \Rightarrow r_1 = 0 \to r = a$
MP= $(a,0) \Rightarrow r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta = a^2 \to r = 2a\cos\theta$
MP= $(a,\frac{1}{2}\pi) \Rightarrow r^2 + a^2 - 2ra\cos(\theta - \frac{1}{2}\pi) = a^2 \to r = 2a\sin\theta$

Voor een cirkel met MP (x_0, y_0) en straal r geldt:
$\sin\varphi = (y - y_0)/r \wedge \cos\varphi = (x - x_0)/r \to$

Parametervergelijking van een cirkel:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}}$$

$y = mx + n \cap x^2 + y^2 = r^2 \to (m^2+1)x^2 + 2mnx + (n^2 = r^2) = 0 \to D = r^2(m^2+1) - n^2 \to$
$D > 0 \Rightarrow n^2 < r^2(m^2+1)$: 2 reële snijpunten
$D = 0 \Rightarrow n^2 = r^2(m^2+1)$: 2 raaklijnen met RC m:

$$\boxed{y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

$$2xdx + 2ydy = 0 \to \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1,y_1} = -\frac{x_1}{y_1} \to y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \to$$

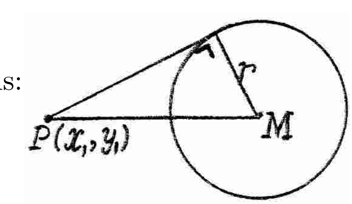
Vergelijking raaklijn in punt (x_1, y_1) van een cirkel met MP in O en straal r:

$$\boxed{xx_1 + yy_1 = r^2}$$

$C_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cap c_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \to$

Vergelijking snijlijn van 2 cirkels:

$$\boxed{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0}$$

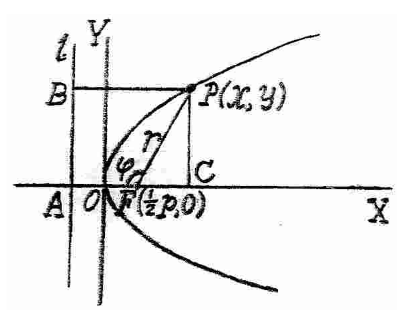


De **macht** m van een punt $P(x_1, y_1)$ t.o.v. $\odot(M, r)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{m = \overline{PM}^2 - r^2}$$

$M(a,b) \Rightarrow \overline{PM}^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 \to$

$$\boxed{\overline{PM}^2 - r^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2}$$



Voor elk punt $P(x, y)$ van een **parabool** geldt:
$D(P, F) = d(P, l) \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2} = x + \frac{1}{2}p \to$

Vergelijking van een parabool:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

$r = \overline{BP} = \overline{CF} + \overline{FA} = r\cos(\pi - \varphi) + p = p - r\cos\varphi \rightarrow$

Poolvergelijking van een parabool:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}}$$

$y = mx + n \cap y^2 = 2px \rightarrow m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0 \rightarrow$

$D = (mn - p)^2 - m^2n^2 \rightarrow D = 0 \Rightarrow (mn - p)^2 = m^2n^2 \Leftrightarrow n = p/2m \rightarrow$

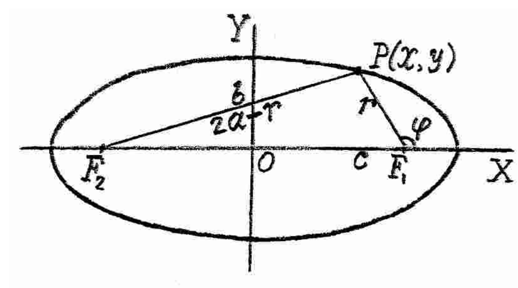
Vergelijking raaklijn met RC $\boldsymbol{m}$:

$$\boxed{y = mx + (p/2m)}$$

$2ydy = 2pdx \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1,y_1} = \frac{p}{y_1} \rightarrow y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \rightarrow$

Vergelijking raaklijn in punt (x_1, y_1) van een parabool met brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $l : y = -\frac{1}{2}p$:

$$\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$$



Voor elk punt $P(x, y)$ van een **ellips** geldt:
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow$
$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$
$(a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2) - a^2y^2$
Substitutie van $a^2 - c^2 = b^2$ geeft de

Vergelijking van een ellips:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

In $\triangle PF_1F_2$ geldt: $(2a - r)^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr\cos(\pi - \varphi) \Leftrightarrow a^2 - c^2 = r(a + \cos\varphi)$

De **excentriciteit** e wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow \frac{b^2}{a} = a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a(1 - e^2) \rightarrow b^2 = r(a + ae\cos\varphi) \rightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}$

<u>Stel</u>: $p = a(1 - e^2) \rightarrow$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}$$

$y = mx + n \cap b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \rightarrow b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) - a^2b^2 = 0 \rightarrow$

$D = a^4m^2n^2 - (b^2 + a^2m^2)(a^2n^2 - a^2b^2) \rightarrow D = 0 \Rightarrow n = \sqrt{a^2m^2 + b^2} \rightarrow$

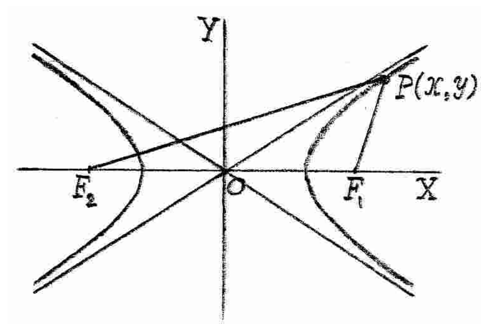
Vergelijking raaklijn met RC $\boldsymbol{m}$:

$$\boxed{y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}}$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1,y_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \rightarrow y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \rightarrow$$

Vergelijking raaklijn in (x_1, y_1) van een ellips met brandpunten $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$, halve lange as a en halve korte as b:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1}$$



Voor elk punt $P(x, y)$ van een **hyperbool** geldt:
$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a \Leftrightarrow$
$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$
Substitutie van $c^2 - a^2 = b^2$ geeft:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Analoog aan de ellips geeft $y = mx + n \cap b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ de **vergelijking van de raaklijn met RC $\boldsymbol{m}$**:

$$\boxed{y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}}$$

Analoog aan de ellips volgt uit $(2x/a^2) - (2y/b^2)(dy/dx) = 0$ voor de vergelijking van de raaklijn in (x_1, y_1) van een hyperbool met brandpunten $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$, halve lange as a en halve korte as b:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1}$$

$y = mx \cap b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \rightarrow (b^2 - a^2m^2)x^2 - a^2b^2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm ab\sqrt{b^2 - a^2m^2} \mid$
$b^2 \neq a^2m^2 \rightarrow b^2 = a^2m^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\infty \rightarrow$ asymptoten van $H(F_1, F_2)$:

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$$

Voor $b = a$ ontstaat een **orthogonale hyperbool**:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

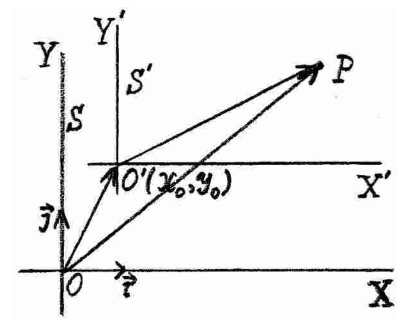
Homogene Cartesische coördinaten van een punt $P(x, y)$ zijn die coördinaten (x_1, x_2, x_3) van P waarvoor geldt:

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_3} \quad \wedge \quad y = \frac{x_2}{x_3}}$$

Analoog voor een punt $P(x, y, z)$ in de ruimte:

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_4} \quad \wedge \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad \wedge \quad z = \frac{x_3}{x_4}}$$

Stel: $P_S = (x, y)$ en $P_{S'} = (x', y')$, met X-as $\parallel$ X'-as en Y-as $\parallel$ Y'-as $\rightarrow$



Als $O_{S'}$ de coördinaten (x_0, y_0) in S heeft, dan geldt:
$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow$
$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + x')\vec{i} + (y_0 + y')\vec{j} \rightarrow$

Transformatievergelijkingen van het vlak:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}}$$

Als $(x', y', 1)$ de homogene coördinaten van P zijn t.o.v. S' en $(x, y, 1)$ die t.o.v. S, dan is dit in matrixvorm te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Hierin iss de middelste matrix de **translatiematrix** M_T voor $S \rightarrow S'$, met $\det(M_T) = 1$.

Analoog geldt voor de transformatievergelijkingen van de ruimte:

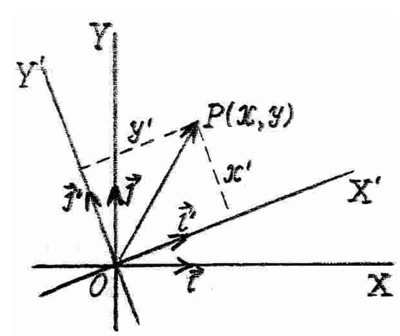
$$\boxed{\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}}$$

In matrixvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Als $\angle(S, S') = \theta$, met $O_S \equiv O_{S'}$, dan geldt:

$$\begin{cases} \vec{i'} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{j'} = \cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{i} \end{cases} \rightarrow$$



$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = x'(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + y'(\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{i}) \Leftrightarrow$
$x\vec{i} + y\vec{j} = (x'\cos\theta - y'\sin\theta)\vec{i} + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)\vec{j} \rightarrow$

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \rightarrow$$

Rotatievergelijkingen van het vlak:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -s\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}}$$

In matrixvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Hierin is de middelste matrix de **rotatiematrix** M_R voor $S \to S'$, met $\det(M_R) = 1$.

Als in de ruimte de richtingscosinussen van $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$ t.o.v. S resp. $(\cos\theta_{11}, \cos\theta_{12}, \cos\theta_{13})$, $(\cos\theta_{21}, \cos\theta_{22}, \cos\theta_{23})$ en $(\cos\theta_{31}, \cos\theta_{32}, \cos\theta_{33})$ zijn, dan geldt:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{i'} = \cos\theta_{11}\vec{i} + \cos\theta_{12}\vec{j} + \cos\theta_{13}\vec{k} \\ \vec{j'} = \cos\theta_{21}\vec{i} + \cos\theta_{22}\vec{j} + \cos\theta_{23}\vec{k} \\ \vec{k'} = \cos\theta_{31}\vec{i} + \cos\theta_{32}\vec{j} + \cos\theta_{33}\vec{k} \end{array}\right. \to$$

$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} = x'(\cos\theta_{11}\vec{i} + \cos\theta_{12}\vec{j} + \cos\theta_{13}\vec{k}) +$
$y'(\cos\theta_{21}\vec{i} + \cos\theta_{22}\vec{j} + \cos\theta_{23}\vec{k}) + z'(\cos\theta_{31}\vec{i} + \cos\theta_{32}\vec{j} + \cos\theta_{33}\vec{k}) \to$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = x\cos\theta_{11} + y\cos\theta_{12} + z\cos\theta_{13} \\ y' = x\cos\theta_{21} + y\cos\theta_{22} + z\cos\theta_{23} \\ z' = x\cos\theta_{31} + y\cos\theta_{32} + z\cos\theta_{33} \end{array}\right.}$$

In matrixvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & 0 \\ \cos\theta_{21} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{23} & 0 \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Voor de produkttransformatie $S \xrightarrow{R} S' \xrightarrow{T} S''$ van het vlak geldt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -x_0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Analoog voor de produkttransformatie $S \xrightarrow{R} S' \xrightarrow{T} S''$ van de ruimte:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & -x_0 \\ \cos\theta_{21} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{23} & -y_0 \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Voor een **spiegeling** van het vlak in de Y-as resp. X-as geldt:

$$\boxed{\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}}$$

In matrixvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Analoog geldt voor een spiegeling van de ruimte in het XY-vlak resp. XZ-vlak resp. XY-vlak:

$$\boxed{\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}}$$

In matrixvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Het produkt van 2 willekeurige spiegelingen komt steeds overeen met een rotatie.

Een **stijve transformatie** is een transformatie waarbij geldt dat de afstand tussen 2 punten invariant is. Translaties, rotaties en spiegelingen alsmede produkten van deze zijn stijve transformaties.
Elke stijve transformatie T kan beschreven worden d.m.v. de matrix

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ met } a^2 + c^2 = 1 \;\wedge\; b^2 + d^2 - 1 \;\wedge\; ab + cd = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + c^2d^2 = 1 \\ (ab + cd)^2 = a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$(ad - bc)^2 = 1 \rightarrow$

$$\boxed{ad - bc = \pm 1}$$

De **kegelsneden** worden gedefinieerd als de grafieken van de algemene 2-de graads vergelijking in 2 veranderlijken:

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \mid a,b,c,d,e,f \in I\!R}$$

In matrixvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{(x,y,1)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0}$$

De matrix $F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ genereert de kwadratische termen:

$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$

Daar F een symmetrische matrix is, geldt" $R^{-1}FR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, met λ_1, λ_2 de eigenwaarden van F en R een matrix waarvan de kolommen de eigenvectoren zijn behorende tot λ_1 en λ_2. Als de eigenvectoren genormaliseerd worden, dan geldt voor R: $R^{-1} = R^T$, zodat R een rotatiematrix voorstelt.
De rotatie transformeert de kegelsnedevergelijking in een vergelijking zonder de $x'y'$-term:

$$(x'\ y'\ 1)R^T\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x'\ y'\ 1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & d' \\ 0 & \lambda_2 & e' \\ d' & e' & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0$$

Als $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, dan transformeert deze vergelijking d.m.v. een translatie van de oorsprong $(-d'/\lambda_1, -e'/\lambda_2)$ in S' naar S'' in een zgn. **canonieke vorm**:

$$(x''\ y''\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d'/\lambda_1 & -e'/\lambda_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & d' \\ 0 & \lambda_2 & e' \\ d' & e' & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d'/\lambda_1 \\ 0 & 1 & -e'/\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x''\ y''\ 1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Bigg|\; f' = -\frac{d'^2}{\lambda_1} - \frac{e'^2}{\lambda_2} + f \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0}$$

Als $\lambda_1 \neq 0$ en $\lambda_2 = 0$ (of omgekeerd), dan transformeert de vergelijking d.m.v. een translatie van de oorsprong $(-d'/\lambda_1, (\frac{1}{2}d'^2/e'\lambda_1) - \frac{1}{2}f/e')$ in S' naar S'' in een canonieke vorm:

$$(x''\ y''\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d'/\lambda_1 & \frac{-d'^2}{2e'\lambda_1}-\frac{f}{2e'} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & d' \\ 0 & 0 & e' \\ d' & e' & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d'/\lambda_1 \\ 0 & 1 & \frac{d'^2}{2e'\lambda_1}-\frac{f}{2e'} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x''\ y''\ 1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2e'y'' = 0}$$

$y = mx \cap ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \to$
$(a + 2bm + cm^2)x^2 + 2(d + em)x + f = 0 \to a + 2bm + cm^2 = 0 \Rightarrow$
$y = mx$ heeft 1 snijpunt met de kromme.
De waarden m_1 en m_2 heten de **asymptotische richtingen** van de kegelsnede. De vorm van de kegelsnede volgt nu uit de waarde van $b^2 - ac$:
$b^2 - ac > 0 \Rightarrow$ hyperbool, $b^2 - ac = 0 \Rightarrow$ parabool, $b^2 - ac < 0 \Rightarrow$ ellips.

Een **algebraïsch oppervlak** is een oppervlak dat bepaald wordt door een reële polynoom in de variabelen x, y en z, die voldoet aan de vergelijking:

$$\boxed{f(x, y, z) = 0}$$

Een **kwadratisch oppervlak** is een algebraïsch oppervlak van de 2-de graad:

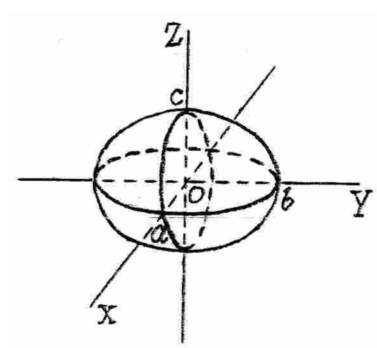
$$\boxed{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2rx + 2sy + 2tz + d = 0 \mid a, b, c, f, g, h, r, s, t, d \in \mathbb{R}}$$

Door een geschikte rotatie en/of translatie van de coördinaatassen is de vergelijking te transformeren in 1 van de 2 canonieke vergelijkingen:

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 \\ Ax^2 + By^2 + Cz = 0 \end{array}}$$

De **ellipsoïde** is het kwadratisch oppervlak met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$



Voor de vergelijking van het raakvlak in het punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1}$$

Voor $a = b = c = r$ ontstaat een **boloppervlak**:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

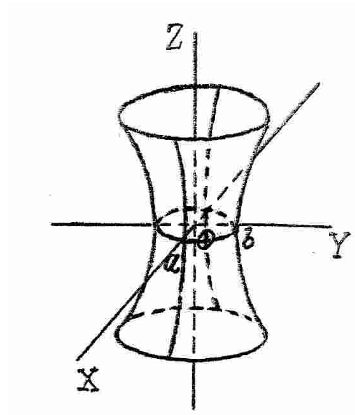
$$\boxed{xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1}$$

De **1-bladige hyperboloïde** is het kwadratisch oppervlak met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1}$$

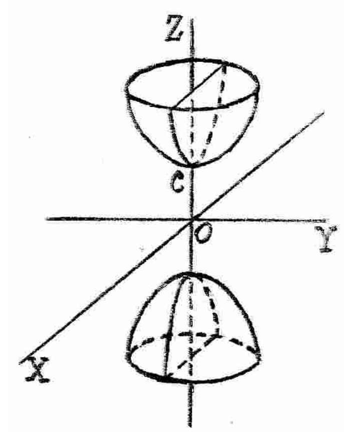


De **2-bladige hyperboloïde** is het kwadratisch oppervlak met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = -1}$$

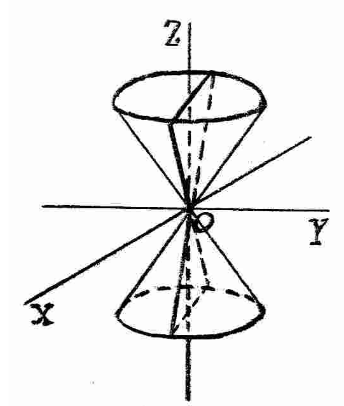


De **kwadratische kegel** is het kwadratisch oppervlak met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0}$$

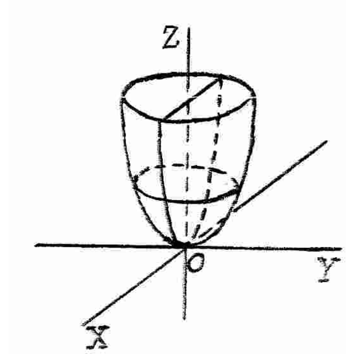
Voor de vergelijking van het raakvlak in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - zz_1 = 0}$$



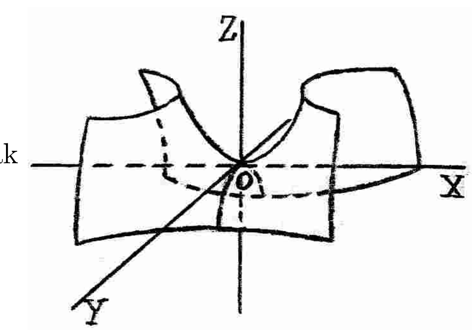
De **elliptische paraboloïde** is het kwadratisch oppervlak met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - cz = 0}$$



Voor de vergelijking van het raakvlak
in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \tfrac{1}{2}c(z - z_1) = 0}$$

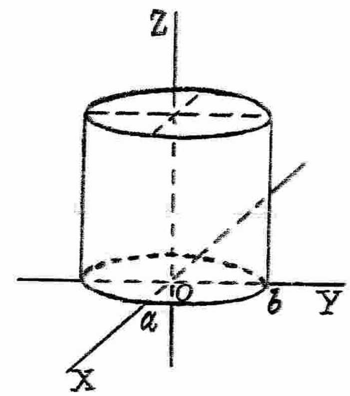


De **hyperbolische paraboloïde** is het kwadratisch oppervlak
met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak
in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \tfrac{1}{2}c(z + z_1) = 0}$$

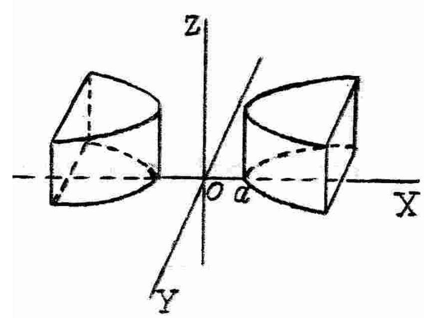


De **elliptische cylinder** is het kwadratisch oppervlak
met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak
in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1}$$

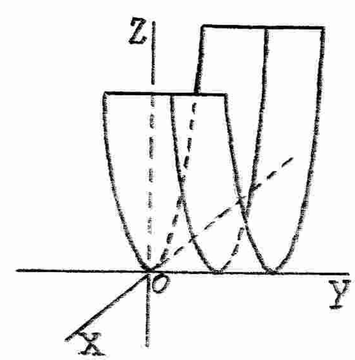


De **hyperbolische cylinder** is het kwadratisch oppervlak
met vergelijking:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak
in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1}$$



De **parabolische cylinder** is het kwadratisch oppervlak
met vergelijking:

$$\boxed{x^2 - cz = 0}$$

Voor de vergelijking van het raakvlak
in punt (x_1, y_1, z_1) geldt:

$$\boxed{xx_1 - \frac{1}{2}c(z_1 + z) = 0}$$

Differentiaal Meetkunde

Stel: X is een monotone continue functie van t op een interval I van de X-as met bereik $V \rightarrow$
X heeft een inverse functie X^{inv} gedefinieerd op $V : t = X^{inv}(x) \rightarrow$
$y = Y(t) = Y(X^{inv}(x)) = f(x)$
De **parametervoorstelling** van de functie $y = f(x)$ wordt gegeven door:

$$\boxed{x = X(t) \quad \wedge \quad y = Y(t)}$$

De parametervoorstelling is in vectorvorm te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}^{*}(t)}$$

Hierin is $\vec{r}$ de plaatsvector van het punt met coördinaten $X(t)$ en $Y(t)$ en t de parameter. De bijbehorende kromme wordt in de pos. richting doorlopen als de parameterwaarden toenemen.

Stel: $x = X(t) \wedge y = Y(t) \mid y = f(x) \rightarrow$

$$y = f\{X(t)\} = Y(t) \rightarrow \frac{dY}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dX}{dt} \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dY/dt}{dX/dt}$$

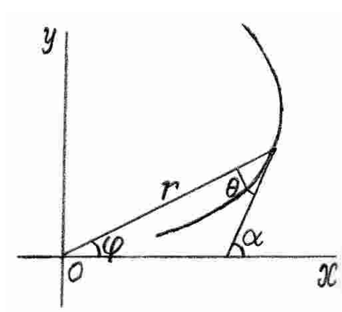
Stel: $dX/dt = \dot{X}(t) \wedge dY/dt = \dot{Y}(t) \rightarrow$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)}}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)}\right\}\frac{1}{\dot{X}(t)} = \frac{\ddot{Y}(t)\dot{X}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\dot{X}^2(t)} \cdot \frac{1}{\dot{X}(t)} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\ddot{Y}(t)\dot{X}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\dot{X}^3(t)}}$$

Als bij poolcoördinaten (φ, r) de voerstraal r gegeven is als functie van φ in de vorm van $r = \rho(\varphi)$, dan stelt dit de **poolvergelijking** van de kromme woor.

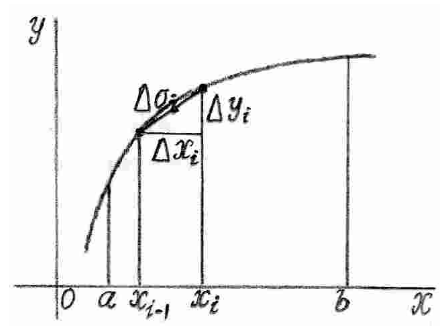


$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \rho(\varphi)\cos\varphi = X(\varphi) \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi = Y(\varphi) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\tan\alpha = \frac{df}{dx} = \frac{\dot{Y}(\varphi)}{\dot{X}(\varphi)} = \frac{\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi}{\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi} = \frac{\rho'(\varphi)\tan\varphi + \rho(\varphi)}{\rho'(\varphi) - \rho(\varphi)\tan\varphi} \rightarrow$$

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \varphi) = \frac{\tan\alpha - \tan\varphi}{1 + \tan\alpha\tan\varphi} = \frac{\rho(\varphi) + \rho(\varphi)\tan^2\varphi}{\rho'(\varphi) + \rho'(\varphi)\tan^2\varphi} \rightarrow$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\rho(\varphi)}{\rho'(\varphi)}}$$



Stel: $K : y = f(x) \mid f$ continu op $[a, b]$
Als $[a, b]$ verdeeld wordt in n deelintervallen met lengte
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, dan geldt voor de bijbehorende y-waarden:
$y_i - y_{i-1} = \Delta y_i \rightarrow$ Lengte bijbehorende koorde is dan:

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$

Voor de totale lengte van K geldt dan: $\sigma(a, b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i \rightarrow$

$$\boxed{\sigma(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}$$

Het **lijnelement** ds van $K : y = f(x)$ wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}$$

Stel: $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} \rightarrow ds = \sqrt{1 + \left\{\frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)}\right\}^2}\dot{X}(t)dt = \sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}dt \rightarrow$

$$\boxed{\sigma(a, b) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}dt}$$

Stel: $K : \vec{r} = \vec{R}(t) \rightarrow \sigma(a, b) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\vec{R}}^2(t)}dt \rightarrow$

$$\boxed{\sigma(a, b) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)}dt}$$

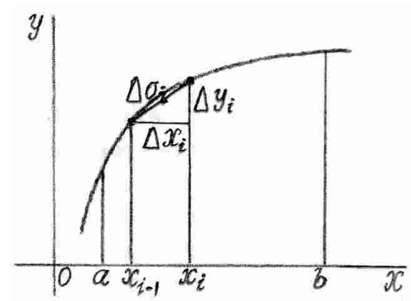
$$\begin{cases} x = R(\varphi)\cos\varphi = X(\varphi) \\ y = R(\varphi)\sin\varphi = Y(\varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{X}(\varphi) = R'(\varphi)\cos\varphi - R(\varphi)\sin\varphi \\ \dot{Y}(\varphi) = R'(\varphi)\sin\varphi - R(\varphi)\cos\varphi \end{cases} \rightarrow$$

$$\boxed{\sigma(a, b) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)}d\varphi}$$

De **kromming** k van een cirkel met straal R wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{k = \frac{1}{R}}$$

Uit $\Delta\sigma = R\Delta\alpha(\sigma)$ volgt voor de gemiddelde kromming van een willekeurige kromme tussen 2 punten P en P_1:
$\overline{k}(\sigma) = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\Delta\alpha(\sigma)}{\Delta\sigma}$
De kromming $k(\sigma)$ in een punt P met booglengte σ wordt nu gedefinieerd als: $k(\sigma) = \lim\limits_{\Delta\sigma\to 0} \dfrac{\Delta\alpha(\sigma)}{\Delta\sigma} \to$



$$\boxed{k(\sigma) = \frac{d\alpha}{d\sigma}}$$

De **kromtestraal** $R(\sigma)$ wordt gedefinieerd als de absolute waarde van het omgekeerde van de kromming van de zgn. **kromtecirkel**:

$$\boxed{R(\sigma) = \frac{1}{|k(\sigma)|}}$$

Stel: $K : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ T(t) \end{pmatrix} \to \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} \to |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}$

Als $\vec{r}(t)$ aangrijpt in een punt $P \in K$, dan is $\vec{r}(t)$ dus een raaklijnvector in P aan K. Daar $\dot{Y}(t)/\dot{X}(t)$ de tangens van de hellingshoek van $\vec{r}(t)$ is, wordt de **tangeltiële eenheidsvector** $\vec{T}(t)$ gegeven door:

$$\boxed{\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}} \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix}}$$

Stel: $t = \sigma \to |\dot{\vec{r}}(\sigma)| = 1 \to$

$$\boxed{\vec{T}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \end{pmatrix}}$$

Als $\angle(\vec{T}(t), X\text{as}) = \alpha(t)$, dan geldt: $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix} \to \dot{\vec{T}}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) \end{pmatrix} \to$

$\vec{T}(t) \cdot \dot{\vec{T}}(t) = 0 \to \vec{T} \perp \dot{\vec{T}}(t)$

Als $\alpha = \alpha(t)$, dan wordt de **normale eenheidsvector** $\vec{N}(a)$ gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{N}(a) = \frac{d\vec{T}(a)}{da}}$$

Stel: $a = \sigma \to |\dot{\vec{T}}(\sigma)| = \dot{\alpha}(\sigma) = k(\sigma) \to$

$$\boxed{\dot{\vec{T}}(\sigma) = k(\sigma)\vec{N}(\sigma)}$$

Stel: $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} \quad \wedge \quad \sigma = s(t) \mid t = s^{inv}(\sigma) \to \alpha(t) = \alpha\{s^{inv}(\sigma)\} = \alpha^*(\sigma) \to$

$$k(\sigma) = \frac{d\alpha^*}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{ds^{inv}}{d\sigma} = \frac{d\alpha/dt}{ds/dt} = k^*(t)$$

$$\tan\alpha(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)} \to \frac{\dot{\alpha}(t)}{\cos^2\alpha(t)} = \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\dot{X}^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\dot{X}^2(t)} \cdot \frac{1}{1 + \{\dot{Y}^2(t)/\dot{X}^2(t)\}} = \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}$$

Substitutie van $\dot{\alpha}(t)$ en $ds/dt = \sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}$ in $k^*(t)$ geeft:

$$\boxed{k(t) = \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)\}^{3/2}}}$$

<u>Stel</u>: $t = \sigma \to \dot{X}^2(\sigma) + \dot{Y}^2(\sigma) = 1 \to \dot{X}(\sigma)\ddot{X}(\sigma) + \dot{Y}(\sigma)\ddot{Y}(\sigma) = 0$

$$k(\sigma) = \dot{X}(\sigma)\ddot{Y}(\sigma) - \dot{Y}(\sigma)\ddot{X}(\sigma) = \ddot{Y}(\sigma)\left\{\dot{X}(\sigma) - \dot{Y}(\sigma)\frac{\ddot{X}(\sigma)}{\ddot{Y}(\sigma)}\right\} = \ddot{Y}(\sigma)\left\{\dot{X}(\sigma) + \dot{Y}(\sigma)\frac{\dot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)}\right\} \Leftrightarrow$$

$$k(\sigma) = \frac{\ddot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)}$$

Analoog voor $k(\sigma) = \ddot{X}(\sigma)\left\{\dot{X}(\sigma)\frac{\ddot{Y}(\sigma)}{\ddot{X}(\sigma)} - \dot{Y}(\sigma)\right\} \to$

$$\boxed{k(\sigma) = \frac{\ddot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)} = -\frac{\ddot{X}(\sigma)}{\dot{Y}(\sigma)}}$$

$$k2(\sigma) = \left\{\frac{\ddot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)}\right\}^2 = \left\{\frac{\ddot{X}(\sigma)}{\dot{Y}(\sigma)}\right\}^2 = \frac{\ddot{Y}^2(\sigma) + \ddot{X}^2(\sigma)}{\dot{X}^2(\sigma) + \dot{Y}^2(\sigma)} = \ddot{X}^2(\sigma) + \ddot{Y}^2(\sigma) \to$$

$$\boxed{k(\sigma) = \sqrt{\ddot{X}^2(\sigma) + \ddot{Y}^2(\sigma)}}$$

<u>Stel</u>: $K : y = f(x) \wedge t = x \to X(x) = x \wedge Y(x) = f(x) \to$

$\dot{X}(x) = 1 \wedge \ddot{X}(x) = 0 \wedge \dot{Y}(x) = f'(x) \wedge \ddot{Y}(x) = f''(x) \to$

$$\boxed{k(x) = \frac{f''(x)}{\{1 + f'^2(x)\}^{3/2}}}$$

<u>Stel</u>: $K : r = \rho(\varphi) \wedge \sigma = s(\varphi) \mid \varphi = s^{inv}(\sigma) \to \alpha(\varphi) = \alpha\{s^{inv}(\sigma)\} = \alpha^*(\sigma) \to$

$$k(\sigma) = \frac{d\alpha^*}{d\sigma} = \frac{d\alpha/d\varphi}{ds/d\varphi} = k^*(\varphi)$$

$$\tan\theta(\varphi) = \frac{\rho(\varphi}{\rho'(\varphi)} \to \frac{1}{\cos^2\theta(\varphi)} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\rho'^2(\varphi) - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\rho'^2(\varphi)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\rho'^2(\varphi) - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\rho'^2(\varphi)} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2\theta(\varphi)} = \frac{\rho'^2(\varphi) - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} \to$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1 + \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\rho^2(\varphi) + 2\rho'^2(\varphi) - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}$$

Substitutie van $d\alpha/d\varphi$ en $ds/d\varphi = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}$ in $k^*(\varphi)$ geeft:

$$\boxed{k(\varphi) = \frac{\rho^2(\varphi) + 2\rho'^2(\varphi) - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)\}^{3/2}}}$$

Analoog aan een vlakke kromme kan een ruimtekromme worden weergegeven door een parametervoorstelling:

$$\boxed{x = X(t) \quad \wedge \quad y = Y(t) \quad \wedge \quad z = Z(t)}$$

In vectorvorm is dit te schrijven als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \vec{r} = \vec{r}^*(t)}$$

Als $P(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0))$ en $Q(X(t_0 + \Delta t), Y(t_0 + \Delta t), Z(t_0 + \Delta t))$ 2 punten zijn van een kromme $K : \vec{r} = \vec{r}^*(t)$, dan zijn de richtingsgetallen van de rechte lijn door P en Q te schrijven als: $\dfrac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \dfrac{Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0)}{\Delta t} \dfrac{Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)}{\Delta t}$

Als P via K naar Q nadert, dan gaat de koorde $\overline{PQ}$ over in de raaklijn in P aan K, met als vergelijking:

$$\boxed{\vec{l}(t) = \begin{pmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \\ Z(t0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \dot{X}(t_0) \\ \dot{Y}(t_0) \\ \dot{Z}(t0) \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \vec{l}(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)}$$

$$\begin{cases} x(y) = X(t_0) + t\dot{X}(t_0) \\ y(y) = Y(t_0) + t\dot{Y}(t_0) \\ z(y) = Z(t_0) + t\dot{Z}(t_0) \end{cases} \rightarrow \frac{x(t) - X(y_0)}{\dot{X}(t_0)} = \frac{y(t) - Y(t_0)}{\dot{Y}(t_0)} = \frac{z(t) - Z(t_0)}{\dot{Z}(t_0)}$$

<u>Stel</u>: $X(t_0) = x_0 \wedge Y(t_0) = y_0 \wedge Z(t_0) = z_0 \wedge \dot{X}(t_0) = \dot{x}_0 \wedge \dot{Y}(t_0) = \dot{y}_0 \wedge \dot{Z}(t_0) = \dot{z}_0 \rightarrow$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}}$$

Het **normalenvlak** in P op de kromme K wordt gedefinieerd als het vlak door P loodrecht op de raaklijn in P aan K.

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}(x - x_0) \rightarrow$$

Voor het normalenvlak geldt dan: $y - y_0 = -[\dot{x}_0/\dot{y}_0](x - x_0) \Leftrightarrow (y - y_0)\dot{y}_0 = -\dot{x}_0(x - x_0)$

Analoog geldt: $(y - y_0)\dot{y}_0 = -\dot{z}_0(z - z_0)$ en $(x - x_0)\dot{x}_0 = -\dot{z}_0(z - z_0) \rightarrow$

Optelling en deling door 2 geeft de vergelijking van het normalenvlak:

$$\boxed{(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 + (z - z_0)\dot{z}_0 = 0}$$

Analoog aan een vlakke kromme geldt voor de lengte van een ruimtekromme
$K : x = X(t) \wedge y = Y(t) \wedge z = Z(t)$:

$$\boxed{\sigma(a,b) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t) + \dot{Z}^2(t)}dt}$$

<u>Stel</u>: $t = x \rightarrow K : x = x \wedge y = Y(x) \wedge z = Z(x) \rightarrow$

$$\boxed{\sigma(a,b) = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dx}\right)^2}dx}$$

<u>Stel</u>: $t = \sigma \rightarrow K : \vec{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} X(\sigma) \\ Y(\sigma) \\ Z(\sigma) \end{pmatrix} \rightarrow \dot{X}^2(\sigma) + \dot{Y}^2(\sigma) + \dot{Z}^2(\sigma) = 1 \rightarrow$

Tangeltiële eenheidsvector $\dot{\vec{r}}(\sigma) = \vec{T}(\sigma)$ in een punt $P \in K$:

$$\boxed{\vec{T}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \\ \dot{Z}(\sigma) \end{pmatrix}}$$

Uit $\dot{X}(\sigma)\ddot{X}(\sigma)+\dot{Y}(\sigma)\ddot{Y}(\sigma)+\dot{Z}(\sigma)\ddot{Z}(\sigma) = 0$ volgt voor de **hoofdnormaalvector** $\ddot{\vec{r}}(\sigma) = \dot{\vec{T}}(\sigma)$:

$$\boxed{\dot{\vec{T}}(\sigma) = \begin{pmatrix} \ddot{X}(\sigma) \\ \ddot{Y}(\sigma) \\ \ddot{Z}(\sigma) \end{pmatrix}}$$

De kromming $\kappa(\sigma)$ van K in punt P wordt nu gedefinieerd als de lengte van $\dot{\vec{T}}(\sigma)$:

$$\boxed{\kappa(\sigma) = \sqrt{\ddot{X}^2(\sigma) + \ddot{Y}^2(\sigma) + \ddot{Z}^2(\sigma)}}$$

Als $P(\sigma)$ en $Q(\sigma + \Delta\sigma)$ 2 punten van K zijn en $\angle(\vec{T}(\sigma), \vec{T}(\sigma + \Delta\sigma)) = \Delta\theta$, dan is dit equivalent met:

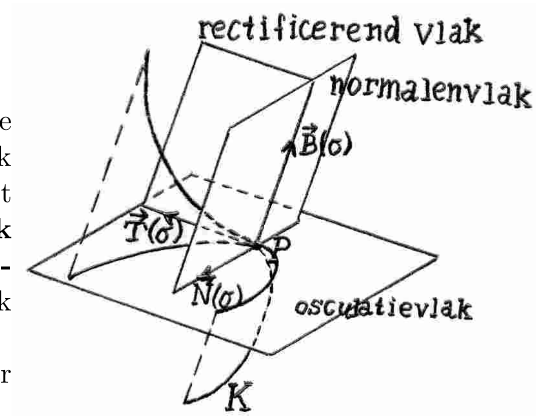
$$\boxed{\kappa(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\sigma} = \frac{d\theta}{d\sigma}}$$

Voor de **eenheidshoofdnormaalvector** $\vec{N}(\sigma)$ in P geldt nu:

$$\boxed{\vec{N}(\sigma) = \frac{\ddot{\vec{r}}(\sigma)}{\kappa(\sigma)} = \frac{\dot{\vec{T}}(\sigma)}{\kappa(\sigma)}}$$

De **eenheidsbinormaalvector** $\vec{B}(\sigma)$ in P wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\vec{B}(\sigma) = \vec{T}(\sigma) \times \vec{N}(\sigma)}$$



De vectoren $\vec{T}(\sigma)$, $\vec{N}(\sigma)$ en $\vec{B}(\sigma)$ hebben dus allen de lengte 1 en staan onderling loodrecht op elkaar. Het vlak door P loodrecht op $\vec{T}(\sigma)$ heet het **normalenvlak**, het vlak door P loodrecht op $\vec{N}(\sigma)$ het **rectificerend vlak** en het vlak door P loodrecht op $\vec{B}(\sigma)$ het **osculatievlak**. De door de 3 vectoren gevormde drievlakshoek heet het **<u>triëder van Frenet-Serret</u>**.
Daar $\vec{T}(\sigma)$, $\vec{N}(\sigma)$ en $\vec{B}(\sigma)$ onderling loodrecht op elkaar staan, geldt:

$$\boxed{\vec{T}(\sigma) = \vec{N}(\sigma) \times \vec{B}(\sigma) \quad \wedge \quad \vec{N}(\sigma) = \vec{B}(\sigma) \times \vec{T}(\sigma)}$$

Uit $\vec{N}(\sigma) = \dot{\vec{T}}(\sigma)/\kappa(\sigma)$ volgt de **<u>Eerste formule van Frenet-Serret</u>**:

$$\boxed{\dot{\vec{T}}(\sigma) = \kappa(\sigma)\vec{N}(\sigma)}$$

$|\vec{B}(\sigma)| = 1 \Leftrightarrow \vec{B}(\sigma) \cdot \vec{B}(\sigma) = 1 \rightarrow \vec{B}(\sigma) \cdot \dot{\vec{B}}(\sigma) = 0 \rightarrow \dot{\vec{B}}(\sigma) \perp \vec{B}(\sigma)$

$\vec{B}(\sigma) \perp \vec{T}(\sigma) \rightarrow \vec{B}(\sigma) \cdot \vec{T}(\sigma) = 0 \rightarrow \dot{\vec{B}}(\sigma) \cdot \vec{T}(\sigma) + \vec{B}(\sigma) \cdot \dot{\vec{T}}(\sigma) = 0 \Leftrightarrow$

$\dot{\vec{B}}(\sigma) \cdot \vec{T}(\sigma) + \kappa(\sigma)\vec{B}(\sigma) \cdot \vec{N}(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{B}}(\sigma) \cdot \vec{T}(\sigma) = 0 \rightarrow \dot{\vec{B}}(\sigma) \perp \vec{T}(\sigma)$

Daar $\dot{\vec{B}}(\sigma)$ en $\vec{N}(\sigma)$ beide loodrecht staan op zowel $\vec{B}(\sigma)$ als $\vec{T}(\sigma)$, is $\dot{\vec{B}}(\sigma)$ dus evenredig met $\vec{N}(\sigma) \rightarrow$ **<u>Tweede formule van Frenet-Serret</u>**:

$$\boxed{\dot{\vec{B}}(\sigma) = -\tau(\sigma)\vec{N}(\sigma)}$$

Hierin heet de evenredigheidsfactor $\tau(\sigma)$ de **torsie**.

$\dot{\vec{N}}(\sigma) = \dot{\vec{B}}(\sigma) \times \vec{T}(\sigma) + \vec{B}(\sigma) \times \dot{\vec{T}}(\sigma) = -\tau(\sigma)\{\vec{N}(\sigma) \times \vec{T}(\sigma)\} + \kappa(\sigma)\{\vec{B}(\sigma) \times \vec{N}(\sigma)\} \rightarrow$

<u>Derde formule van Frenet-Serret</u>:

$$\boxed{\dot{\vec{N}}(\sigma) = \tau(\sigma)\vec{B}(\sigma) - \kappa(\sigma)\vec{T}(\sigma)}$$

Analoog aan de kromming geldt voor de torsie als $P(\sigma)$ en $Q(\sigma + \Delta\sigma)$ 2 punten van een kromme K zijn met $\angle(\vec{B}(\sigma), \vec{B}(\sigma + \Delta\sigma)) = \Delta\varphi$:

$$\boxed{\tau(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma}}$$

$$\dot{\vec{r}}(\sigma)\cdot\ddot{\vec{r}}(\sigma)\times\dddot{\vec{r}}(\sigma) = \vec{T}(\sigma)\cdot\kappa(\sigma)\vec{N}(\sigma)\times[\kappa(\sigma)\dot{\vec{N}}(\sigma)+\dot{\kappa}(\sigma)\vec{N}(\sigma)$$

$$\dot{\vec{r}}(\sigma)\cdot\ddot{\vec{r}}(\sigma)\times\dddot{\vec{r}}(\sigma) = \vec{T}(\sigma)\cdot\kappa(\sigma)\vec{N}(\sigma)\times[\kappa(\sigma)\{\tau(\sigma)\vec{B}(\sigma)-\kappa(\sigma)\vec{T}(\sigma)\}+\dot{\kappa}(\sigma)\vec{N}(\sigma)] \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(\sigma)\cdot\ddot{\vec{r}}(\sigma)\times\dddot{\vec{r}}(\sigma) = &\vec{T}(\sigma)\cdot[\kappa^2(\sigma)\tau(\sigma)\vec{N}(\sigma)\times\vec{B}(\sigma)-\kappa^3(\sigma)\vec{N}(\sigma)\times\vec{T}(\sigma)+\\ &\kappa(\sigma)\dot{\kappa}(\sigma)\vec{N}(\sigma)\times\vec{N}(\sigma)] \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}}(\sigma)\cdot\ddot{\vec{r}}(\sigma)\times\dddot{\vec{r}}(\sigma) = \vec{T}(\sigma)\cdot[\kappa^2(\sigma)\tau(\sigma)\vec{T}(\sigma)+\kappa^3(\sigma)\vec{B}(\sigma)] = \kappa^2(\sigma)\tau(\sigma) \rightarrow$$

$$\boxed{\tau(\sigma) = \frac{1}{\kappa^2(\sigma)}\{\dot{\vec{r}}(\sigma)\cdot\ddot{\vec{r}}(\sigma)\times\dddot{\vec{r}}(\sigma)\} = \frac{1}{\kappa^2(\sigma)}\left\|\begin{array}{ccc}\dot{X}(\sigma) & \dot{Y}(\sigma) & \dot{Z}(\sigma)\\ \ddot{X}(\sigma) & \ddot{Y}(\sigma) & \ddot{Z}(\sigma)\\ \dddot{X}(\sigma) & \dddot{Y}(\sigma) & \dddot{Z}(\sigma)\end{array}\right\|}$$

Als $P(t0)$ een punt is van een kromme $K : \vec{r} = \vec{r}(t)$, dan geldt voor een omgeving van P:

$$\begin{cases} X(t_0+h) = X(t_0)+h\dot{X}(t_0)+\frac{1}{2}h^2\ddot{X}(t_0)+\cdots = X_0+h\dot{X}_0+\frac{1}{2}h^2\ddot{X}_0+\cdots\\ Y(t_0+h) = Y(t_0)+h\dot{Y}(t_0)+\frac{1}{2}h^2\ddot{Y}(t_0)+\cdots = Y_0+h\dot{Y}_0+\frac{1}{2}h^2\ddot{Y}_0+\cdots\\ Z(t_0+h) = Z(t_0)+h\dot{Z}(t_0)+\frac{1}{2}h^2\ddot{Z}(t_0)+\cdots = Z_0+h\dot{Z}_0+\frac{1}{2}h^2\ddot{Z}_0+\cdots\end{cases}$$

Voor een willekeurig vlak V door P geldt: $V : A(x-X_0)+B(y-Y_0)+C(z-Z_0) = 0$
V snijdt K in punten met plaatsvector $(X(t_0+h), Y(t_0+h), Z(t_0+h))$, waarbij de h-waarden volgen uit:
$A(h\dot{X}_0+\frac{1}{2}h^2\ddot{X}_0+\cdots)+B(h\dot{Y}_0+\frac{1}{2}h^2\ddot{Y}_0+\cdots)+C(h\dot{Z}_0+\frac{1}{2}h^2\ddot{Z}_0+\cdots) = 0 \Leftrightarrow$
$h(A\dot{X}_0+B\dot{Y}_0+C\dot{Z}_0)+\frac{1}{2}h^2(A\ddot{X}_0+B\ddot{Y}_0+C\ddot{Z}_0)+\cdots = 0$
Hieraan voldoet $h = 0$, daar deze waarde correspondeert met P als snijpunt; als A, B en C zo gekozen worden dat $A\dot{X}_0+B\dot{Y}_0+C\dot{Z}_0 = 0$ en $A\ddot{X}_0+B\ddot{Y}_0+C\ddot{Z}_0 = 0$, dan heeft V met K 3 punten gemeen die met P samenvallen en stelt het osculatievlak voor.
Eliminatie van A, B en C geeft voor de vergelijking van V:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-X_0 & y-Y_0 & z-Z_0\\ \dot{X}_0 & \dot{Y}_0 & \dot{Z}_0\\ \ddot{X}_0 & \ddot{Y}_0 & \ddot{Z}_0\end{vmatrix} = 0}$$

Als $P(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0))$ een punt is van een oppervlak $S : F(x, y, z) = 0$, dan is een raaklijn in P aan S een raaklijn aan een kromme $K : \vec{r}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ die geheel op S ligt. Het raakvlak in P aan S is dan het platte vlak gevormd door alle raaklijnen in P aan S. Voor de raaklijn in P aan K geldt dan:

$$\frac{x-X(t_0)}{\dot{X}(t_0)} = \frac{y-Y(t_0)}{\dot{Y}(t_0)} = \frac{z-Z(t_0)}{\dot{Z}(t_0)} \Leftrightarrow \dot{X}(t_0) = x-x_0 \wedge \dot{Y}(t_0) = y-y_0 \wedge \dot{Z}(t_0) = z-z_0$$

Uit $K \in S$ volgt: $F\{X(t), Y(t), Z(t)\} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{dX}{dt}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dY}{dt}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{dZ}{dt} = 0 \rightarrow$

In punt P geldt: $\dfrac{\partial F}{\partial x_0}\dot{X}_0+\dfrac{\partial F}{\partial y_0}\dot{Y}_0+\dfrac{\partial F}{\partial z_0}\dot{Z}_0 = 0$

Substitutie van $\dot{X}(t_0), \dot{Y}(t_0)$ en $\dot{Z}(t_0)$ geeft dan de vergelijking voor het raakvlak in P aan S:

$$\boxed{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y_0}+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z_0} = 0}$$

Stel: $S : z = f(x,y) \rightarrow f(x,y) - z = 0 \rightarrow F(x,y,z) = f(x,y) - z \rightarrow \partial F/\partial x_0 = -1 \rightarrow$ Raakvlak in P aan oppervlak $S : z = f(x,y)$:

$$\boxed{z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}}$$

Stel: $z = f(x,y) \rightarrow dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = pdx + qdy$

Overgang op kromlijnige coördinaten (u,v) geeft: $x = f(u,v) \wedge y = g(u,v) \wedge z = h(u,v) \rightarrow$

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Differentiatie van $x = f(u,v)$ en $y = g(u,v)$ naar x geeft:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g/\partial v}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}} \ \wedge\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial g/\partial u}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y/\partial v}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}} \ \wedge\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y/\partial u}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}} \rightarrow p = -\frac{\partial(y,z)/\partial(u,v)}{\partial(x,y)/\partial(u,v)}$$

Differentiatie van $x = f(u,v)$ en $y = g(u,v)$ naar y geeft:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial v}{\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial u}} \ \wedge\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f/\partial u}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x/\partial v}{\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}} \ \wedge\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial x/\partial u}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}} \rightarrow q = -\frac{\partial(z,x)/\partial(u,v)}{\partial(x,y)/\partial(u,v)} \rightarrow$$

De vergelijking van het raakvlak in een punt (x_0, y_0, z_0) van een oppervlak $z = f(x,y)$ bij kromlijnige coördinaten is van de vorm:

$$\boxed{(x - x_0)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (y - y_0)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (z - z_0)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0}$$

Stel: $z = f(x,y) \rightarrow dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

Als $P(x,y,z)$ een raakpunt is van $z = f(x,y)$ en $Q(X,Y,Z)$ een willekeurig punt van het raakvlak in P, dan geldt: $dx = X - x \wedge dy - Y - y \wedge dz - Z - z \rightarrow$

Vergelijking van het raakvlak in $P(x, y, z)$ aan het oppervlak $z = f(x, y)$:

$$\boxed{Z - z = (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y}}$$

<u>Stel</u>: $p = \partial f/\partial x \quad \wedge \quad q = \partial f/\partial y \rightarrow$

$$\boxed{Z - z = p(X - x) + q(Y - y)}$$

Als $P(x, y, z)$ een punt is van het oppervlak $f(x, y, z) = 0$ en $\varphi(x, y, z) = 0$ is een 2-de oppervlak dat ook door P gaat, dan hebben f en φ een gemeenschappelijke doorsnijdingskromme die door P gaat. Uit $f(x, y, z) = 0$ en $\varphi(x, y, z) = 0$ volgt:

$$\begin{cases} \Delta f = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz\right)^2 + \cdots = 0 \\ \\ \Delta \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz\right)^2 + \cdots = 0 \end{cases}$$

Substitutie van $dx = X - x \wedge dy = Y - y \wedge dz = Z - z$ geeft:

$$\begin{cases} (X - x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \\ (X - x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z - z)\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Hierbij is (X, Y, Z) een willekeurig punt van de raaklijn aan de doorsnijdingskromme en stelt elke vergelijking een plat vlak voor. Daar de 1-ste vergelijking niet verandert als φ verandert, ligt de raaklijn aan de doorsnijdingskromme steeds in hetzelfde vlak $\rightarrow$
Vergelijking van het raakvlak in $P(x, y, z)$ aan het oppervlak $f(x, y, z) = 0$:

$$\boxed{(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0}$$

Voor de normaal die in punt P loodrecht op het raakvlak staat geldt dat de coëfficiënten van het raakvlak evenredig zijn aan de richtingscosinussen van de normaal op dat vlak $\rightarrow$
Vergelijking van de normaal in $P(x, y, z)$:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \dfrac{X - x}{\partial f/\partial x} = \dfrac{Y - y}{\partial f/\partial y} = \dfrac{Z - z}{\partial f/\partial z} & f(x, y, z) = 0 \\ \\ \dfrac{X - x}{p} = \dfrac{Y - y}{q} = \dfrac{Z - z}{-1}! & z = f(x, y) \end{array}}$$

De vergelijking van de raaklijn in punt $P(x, y, z)$ aan een ruimtekromme is te schrijven als:

$$\boxed{\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}}$$

Hieruit volgt voor de vergelijking van het normaalvlak in $P(x, y, z)$ loodrecht op de raaklijn:

$$\boxed{(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0}$$

De vergelijking van het osculatievlak in $P(x, y, z)$ is te schrijven als:

$$\boxed{\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0}$$

De hoofdnormaal is de snijlijn van het osculatievlak en het normaalvlak:

$$\boxed{\frac{X-x}{d^2x} = \frac{Y-y}{d^2y} = \frac{Z-z}{d^2z}}$$

Daar het rectificerend vlak loodrecht op de hoofdnormaal staat, geldt voor de vergelijking van het rectificerend vlak:

$$\boxed{(X-x)d^2x + (Y-y)d^2y + (Z-z)d^2z = 0}$$

De binormaal is de snijlijn van het rectificerend vlak met het normaalvlak en staat loodrecht op het osculatievlak:

$$\boxed{\frac{X-x}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{Y-y}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{Z-z}{dxd^2y - dyd^2x}}$$

<u>Stel</u>: $P(x, y, z)$ en $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ zijn punten van een ruimtekromme K, met bg$PQ = \Delta s \rightarrow$

$\Delta x/\Delta s \approx \cos(\angle\overline{PQ}, X\text{-as}) \rightarrow dx/ds \equiv \cos(\angle\text{raaklijn}, X\text{as})$

Analoog voor dy/ds en dz/ds m.b.t. de Y-as resp. Z-as.

Hierbij is ds een stukje van de raaklijn en *niet* van K, en is dx, dy en dz de projectie van ds op resp. de X-, Y- en Z-as $\rightarrow$

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

De richtingscosinussen a, b en c van de raaklijn aan een kromme zijn te schrijven als:

$a = \dfrac{dx}{ds} \ \wedge \ b = \dfrac{dy}{ds} \ \wedge \ c = \dfrac{dz}{ds} \rightarrow$

Vergelijking van een raaklijn in punt (x, y, z) aan een ruimtekromme:

$$\boxed{\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}}$$

De vergelijking van het normaalvlak in punt (x, y, z) is dan:

$$\boxed{a(X-x) + b(Y-y)_c(Z-z) = 0}$$

Als A een beginpunt is van een ruimtekromme K waardoor een raaklijn gaat, dan is A' het zgn. **sferische beeldpunt** van A op een eenheidsbol rond O dat ontstaat door de snijding van een straal uit O evenwijdig aan de raaklijn door A met het boloppervlak. De verz. van al deze beeldpunten van elk punt van K vormt een kromme op de bol, de zgn. **sferische**

indicatrix van K.
Als op K bg$BC = \Delta s$ en op de bijbehorende indicatrix bg $B'C' = \Delta\sigma$, dan is de hoek tussen de raaklijn in B en C gelijk aan $\angle B'OC'$. De **eerste kromming** ofwel **flexie** van K in B wordt dan gedefinieerd als: $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Delta\sigma / \Delta s = d\sigma / ds$

Voor de kromtestraal R geldt dan:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds}}$$

Dit komt overeen met de definitie van de kromming van een vlakke kromme.

Daar de richtingscosinussen van de raaklijn in B gelijk zijn aan de rechthoekige coördinaten van B', geldt voor $d\sigma^2$: $d\sigma^2 = da^2 + db^2 + dc^2 \rightarrow \dfrac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\dfrac{d^2}{ds^2} + \dfrac{da^2}{dsb^2} + \dfrac{dc^2}{ds^2}} \rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{da}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc}{ds}\right)^2}}$$

Substitutie van $a = dx/ds$, $b = dy/ds$ en $c = dz/ds$ geeft:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}$$

Daar de indicatrix een bolkromme is, staat de raaklijn h' in B' (met richtingscosinussen a', b', c') loodrecht op OB' $\rightarrow$ De lijn door B evenwijdig met h' staat loodrecht op de raaklijn T in B. Uit $B'(a, b, c)$ en $d\sigma$ volgt: $a' = da/d\sigma \wedge b' = db/d\sigma \wedge c' = dc/d\sigma$

Substitutie van $d\sigma = \dfrac{ds}{R}$ geeft: $a' = R\dfrac{da}{ds} = R\dfrac{d^2x}{ds^2} \wedge b' = R\dfrac{db}{ds} = R\dfrac{d^2y}{ds^2} \wedge c' = R\dfrac{dc}{ds} = R\dfrac{d^2z}{ds^2}$

Dit zijn de richtingscosinussen van h, die dus de hoofdnormaal in B op de ruimtekromme is. De vergelijking van de hoofdnormaal is nu te schrijven als:

$$\boxed{\frac{X - x}{a'} = \frac{Y - y}{b'} = \frac{Z - z}{c'}}$$

De vergelijking van het rectificerend vlak is dus te schrijven als:

$$\boxed{(X - x)a' + (Y - y)b' + (Z - z)c' = 0}$$

De richtingscosinussen van de binormaal zijn te schrijven als:

$$\begin{cases} a'' = bc' - b'c \\ b'' = ca' - c'a \\ c'' = ab' - a'b \end{cases} \rightarrow a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \Leftrightarrow (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 = 1$$

Substitutie van de uitdrukkingen voor a, b, c, a', b' en c' geeft:

$$\left(\frac{dy}{ds} \cdot R\frac{d^2z}{ds^2} - R\frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \cdot R\frac{d^2x}{ds^2} - R\frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds} \cdot R\frac{d^2y}{ds^2} - R\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

Het krommingsmiddelpunt $M(x', y', z')$ is het punt op de hoofdnormaal aan de holle zijde van de ruimtekromme op afstand R van punt B; er geldt dan:
$x' - x = Ra' \;\wedge\; y' - y = Rb' \;\wedge\; z' - z = Rc' \rightarrow$

$$\boxed{M(x', y', z' = \left(x + R^2\frac{d^2x}{ds^2}, y + R^2\frac{d^2y}{ds^2}, z + R^2\frac{d^2z}{ds^2}\right)}$$

De **tweede kromming** ofwel **torsie** van een ruimtekromme (die bij vlakke krommen nul is) wordt gemeten door de verandering van het osculatievlak, dan wel van de binormaal. Door O evenwijdig aan de binormalen in B getrokken lijnen snijden de eenheidsbol in punten B'', het zgn. 2-de beeldpunt van B, en vormen de 2-de indicatrix van de ruimtekromme; de richtingscosinussen a'', b'', c'' van de binormaal zijn de rechthoekige coördinaten van B''.
Als $\Delta\tau$ de booglengte van de 2-de indicatrix is, dan wordt analoog aan de eerste kromming de torsie gedefinieerd als $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Delta\tau/\Delta s = d\tau/ds$

Voor de torsiestraal T geldt dan:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds}}$$

$$d\tau^2 = da''^2 + db''^2 + dc''^2 \rightarrow \frac{d\tau}{ds} = \sqrt{\frac{da''^2}{ds^2} + \frac{db''^2}{ds^2} + \frac{dc''^2}{ds^2}} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{da''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{ds}\right)^2}}$$

Daar de raaklijn in B'' evenwijdig aan de hoofdnormaal h loopt, geldt:

$$a' = \frac{da''}{d\tau} \;\wedge\; b' = \frac{db''}{d\tau} \;\wedge\; c' = \frac{dc''}{d\tau}$$

Substitutie van $d\tau = \dfrac{ds}{T}$ geeft: $a' = T\dfrac{da''}{ds} \wedge b' = T\dfrac{b''}{ds} \wedge c' = T\dfrac{c''}{ds}$

Daar de raaklijn, hoofdnormaal en binormaal loodrecht op elkaar staan, geldt:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases} \rightarrow a\frac{da}{ds} + a'\frac{da'}{ds} + a''\frac{da''}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{aa'}{R} + a'\frac{da'}{ds} + \frac{a'a''}{T} = 0 \Leftrightarrow$$

$\dfrac{da'}{ds} = -\left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{a''}{T}\right)$; analoog voor b en c $\rightarrow$

<u>Formules van Frenet-Serret in Cartesische vorm</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{da}{ds} = \dfrac{a'}{R} \;\wedge\; \dfrac{db}{ds} = \dfrac{b'}{R} \;\wedge\; \dfrac{dc}{ds} = \dfrac{c'}{R} \\[2ex] \dfrac{da''}{ds} = \dfrac{a'}{T} \;\wedge\; \dfrac{db''}{ds} = \dfrac{b'}{T} \;\wedge\; \dfrac{dc''}{ds} = \dfrac{c'}{T} \\[2ex] \dfrac{da'}{ds} = -\left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{a''}{T}\right) \;\wedge\; \dfrac{db'}{ds} = -\left(\dfrac{b}{R} + \dfrac{b''}{T}\right) \;\wedge\; \dfrac{dc'}{ds} = -\left(\dfrac{c}{R} + \dfrac{c''}{T}\right) \end{array}}$$

Stel: $x = f(u,v) \ \wedge \ y = g(u,v) \ \wedge \ z = h(u,v)$
Eliminatie van u en v geeft een vergelijking tussen x, y en z die een oppervlak voorstelt. Als u en v functies zijn van een parameter t, dan doorloopt het punt (x,y,z) een kromme op het oppervlak. Er geldt dan:

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}du + \frac{\partial x_i}{\partial v}dv\right)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial v}dudv + \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

Stel: $\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = E \ \wedge \ \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial v} = F \ \wedge \ \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = G \rightarrow$

Eerste fundamentaal vorm:

$$\boxed{ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

Voor het oppervlakte-element dS geldt:

$$dS = \left|\frac{\partial x}{\partial u}du \times \frac{\partial x}{\partial v}dv\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}\right| dudv = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}\right)}dudv \Leftrightarrow$$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)}dudv \rightarrow$$

$$\boxed{dS = \sqrt{EG - F^2}dudv}$$

Als u en v functies zijn van een parameter t', dan ontstaat een 2-de kromme; als deze de 1-ste kromme in een punt $P(u,v)$ snijdt, dan geldt voor de cos van de hoek φ die de raaklijnen in P met elkaar maken:

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

Hierin zijn $\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)$ en $\left(\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial y}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial s}\right)$ de richtingscosinussen van de raaklijn in P aan de 1-ste resp. 2-de kromme.

$$dx\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v\right) \Leftrightarrow$$

$$dx\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du\partial u + \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}du\partial v + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}dv\partial u + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv\partial v$$

Analoog voor $dy\partial y$ en $dz\partial z \rightarrow \cos\varphi = \dfrac{Edu\partial u + F(du\partial v + dv\partial u) + Gdv\partial v}{ds\partial s} \rightarrow$

Voorwaarde dat 2 krommen op een oppervlak elkaar loodrecht snijden:

$$\boxed{Edu\partial u + F(du\partial v + dv\partial u) + Gdv\partial v = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \text{const.} \ \wedge v \neq \text{const.} \ \Rightarrow du = 0 \ \wedge \ dv \neq 0 \\ u \neq \text{const.} \ \wedge v = \text{const.} \ \Rightarrow \partial u \neq 0 \ \wedge \ \partial v = 0 \end{array}\right\} \rightarrow ds^2 = Gdv^2 \ \wedge \ \partial s^2 = E\partial u^2 \rightarrow$$

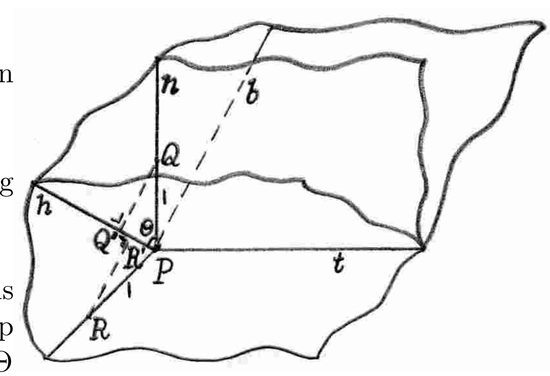
$$\cos\varphi = \frac{Fdv\partial u}{\sqrt{EG}dv\partial u} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \rightarrow$$

$$\boxed{u = \text{const.} \ \perp v = \text{const.} \ \Rightarrow F = 0}$$

Als de krommen u =const. en v =const. elkaar overal op het oppervlak loodrecht snijden, dan zijn zij elkaars **orthogonale trajectoriën**; er geldt dan:

$$\boxed{ds^2 = Edu^2 + Gdv^2}$$

Stel: Op een oppervlak ligt een kromme die door een punt P gaat waarin een raaklijn t met richtingscosinussen a, b, c loopt; h is de hoofdnormaal met richtingscosinussen a', b', c' en b de binormaal met richtingscosinussen λ, μ, ν; h' is een lijn door P loodrecht op het vlak door t en n met richtingscosinussen a_1, b_1, c_1. De hoek tussen h, die loodrecht op t staat en in het vlak ligt dat door n en h' gaat, is Θ.



Als $\overline{PQ} = 1$ en Q' de projectie van R in de richting van b en dus loodrecht op h, dan geldt:
$\overline{PQ'} = \cos\Theta$ en $\overline{QQ'} = \sin\Theta$
Als $\overline{PR} = 1$ en R' dec projectie van R in de richting van b en dus loodrecht op h, dan geldt:
$\overline{PR'} = \sin\Theta$ en $\overline{RR'} = \cos\Theta \rightarrow \overline{R'R} = -\cos\Theta$
De projectie van $\overline{PQ}$ op de resp. X-, Y- en Z-as is gelijk aan de projectie van $\overline{PQ'Q} = \cos\Theta + \sin\Theta$ op deze assen; analoog voor $\overline{PR}$ en $\overline{PR'R} = \sin\Theta - \cos\Theta$

Daar de projectie van $\overline{PQ}$ en $\overline{PR}$ gelijk is aan de richtingscosinussen van de lijnen waarlangs ze liggen, t.w. λ, μ, ν resp. a_1, b_1, c_1, geldt dus:

$$\begin{cases} \lambda = a'\cos\Theta + a''\sin\Theta \\ \mu = b'\cos\Theta + b''\sin\Theta \\ \nu = c'\cos\Theta + c''\sin\Theta \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} a_1 = a'\sin\Theta - a''\cos\Theta \\ b_1 = b'\sin\Theta - b''\cos\Theta \\ c_1 = c'\sin\Theta - c''\cos\Theta \end{cases}$$

Vermenigvuldiging van λ met $\cos\Theta$ en van a_1 met $\sin\Theta$ en optelling, en analoog voor μ en b_1 resp. ν en c_1 geeft:

$$\begin{cases} a' = \lambda\cos\Theta + a_1\sin\Theta \\ b' = \mu\cos\Theta + b_1\sin\Theta \\ c' = \nu\cos\Theta + c_1\sin\Theta \end{cases}$$

Vermenigvuldiging van λ met $\sin\Theta$ en van a_1 met $\cos\Theta$ en aftrekking, en analoog voor μ en b_1 resp. ν en c_1 geeft:

$$\begin{cases} a'' = \lambda\sin\Theta - a_1\cos\Theta \\ b'' = \mu\sin\Theta - b_1\cos\Theta \\ c'' = \nu\sin\Theta - c_1\cos\Theta \end{cases}$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{da'}{ds}\cos\Theta - a'\sin\Theta\frac{d\Theta}{ds} + \frac{da''}{ds}\sin\Theta + a''\cos\Theta\frac{d\Theta}{ds} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = (-a'\sin\Theta + a''\cos\Theta)\frac{d\Theta}{ds} + \frac{da'}{ds}\cos\Theta + \frac{da''}{ds}\sin\Theta$$

Substitutie van $\dfrac{da'}{ds} = -\left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{a''}{T}\right)$ en $\dfrac{da''}{ds} = \dfrac{a'}{T}$ geeft:

$$\frac{d\lambda}{ds} = -a_1\frac{d\Theta}{ds} - \frac{a\cos\Theta}{R} + \frac{1}{T}(a'\sin\Theta - a''\cos\Theta) = -a_1\frac{d\Theta}{ds} - \frac{a\cos\Theta}{R} + \frac{a_1}{T} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{d\lambda}{ds} = a_1\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\Theta}{ds}\right) - \dfrac{a\cos\Theta}{R}$; analoog voor $\dfrac{d\mu}{ds}$ en $\dfrac{d\nu}{ds}$.

$\dfrac{da_1}{ds} = \dfrac{da'}{ds}\sin\Theta + a'\cos\Theta\dfrac{d\Theta}{ds} - \dfrac{da''}{ds}\cos\Theta + a''\sin\Theta\dfrac{d\Theta}{ds} \Leftrightarrow$

$\dfrac{da_1}{ds} = (a'\cos\Theta + a''\sin\Theta)\dfrac{d\Theta}{ds} + \dfrac{da'}{ds}\sin\Theta - \dfrac{da''}{ds}\cos\Theta$

Substitutie van $\dfrac{da'}{ds}$ en $\dfrac{da''}{ds}$ geeft: $\dfrac{da_1}{ds} = -\lambda\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\Theta}{ds}\right) - \dfrac{a\sin\Theta}{R}$

Analoog voor db_1/ds en dc_1/ds.

Tevens geldt: $\dfrac{da}{ds} = \dfrac{a'}{R} = \dfrac{\lambda\cos\Theta}{R} + \dfrac{a_1\sin\Theta}{R}$ en analoog voor $\dfrac{db}{ds}$ en $\dfrac{dc}{ds}$.

Vermenigvuldiging met λ resp. μ resp. ν en optelling geeft:

$\lambda\dfrac{da}{ds} + \mu\dfrac{db}{ds} + \nu\dfrac{dc}{ds} = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\dfrac{\cos\Theta}{R} + (\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1)\dfrac{\sin\Theta}{R}$

$n \perp h' \wedge \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \rightarrow \dfrac{\cos\Theta}{R} = \lambda\dfrac{d^2x}{ds^2} + \mu\dfrac{d^2y}{ds^2} + \nu\dfrac{d^2z}{ds^2}$

<u>Stel</u>: $l_1 = H\lambda \wedge l_2 = H\mu \wedge l_3 = H\nu \mid H = \sqrt{EG - F^2} \rightarrow$

$\dfrac{\cos\Theta}{R} = \dfrac{1}{H}\left\{l_1\dfrac{d^2x}{ds^2} + l_2\dfrac{d^2y}{ds^2} + l_3\dfrac{d^2z}{ds^2}\right\}$

$ds = \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv \rightarrow d^2x = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}dudv + \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2$; analoog voor d^2y en $d^2z \rightarrow$

$\sum\limits_i l_i d^2x_i = \sum\limits_i l_i\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}du^2 + 2\sum\limits_i l_i\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v}dudv + \sum\limits_i l_i\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}dv^2$

<u>Stel</u>: $\sum\limits_i l_i\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = E' \;\wedge\; \sum\limits_i l_i\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v} = F' \;\wedge\; \sum\limits_i l_i\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = G' \rightarrow$

$$\boxed{\dfrac{\cos\Theta}{R} = \dfrac{1}{H}\cdot\dfrac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}}$$

Vermenigvuldiging van da/ds, db/ds en dc/ds met a_1 resp. b_1 resp. c_1 en optelling geeft:

$\dfrac{\sin\Theta}{R} = a_1\dfrac{d^2x}{ds^2} + b_1\dfrac{d^2y}{ds^2} + c_1\dfrac{d^2z}{ds^2}$

Daar $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$, is elk element gelijk aan zijn bijbehorende monor $\rightarrow$

$$\dfrac{\sin\Theta}{R} = \dfrac{1}{ds^2}\left\{-dx^2\begin{vmatrix} b & c \\ \mu & \nu \end{vmatrix} + dy^2\begin{vmatrix} a & c \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} - dz^2\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}\right\} = \dfrac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\dfrac{\sin\Theta}{R} = \dfrac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}}$$

Het linkerlid heet de **geodetische kromming** en $R/\sin\Theta$ de **geodetische kromtestraal** van de ruimtekromme in een punt P op het oppervlak.
geodetische lijnen van een oppervlak zijn die krommen op het oppervlak waarvan de geodetische kromming in alle punten nul is, d.w.z. voor $R \neq 0$ is dat voor $\Theta = 0$, dus als het osculatievlak de normaal op het oppervlak bevat.
Vermenigvuldiging van $d\lambda/ds$. $d\mu/ds$ en $d\nu/ds$ met a_1 resp. b_1 resp. c_1 en optelling geeft:

$$\frac{1}{T} - \frac{d\Theta}{ds} = a_1\frac{d\lambda}{ds} + b_1\frac{d\mu}{ds} + c_1\frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{ds}\left\{-d\lambda\begin{vmatrix} b & c \\ \mu & \nu \end{vmatrix} + d\mu\begin{vmatrix} a & c \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} - d\nu\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{T} - \frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d\lambda & d\mu & d\nu \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{T} - \frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d\lambda & d\mu & d\nu \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}}$$

Het linkerlid heet de **geodetische torsie** van de ruimtekromme op het oppervlak in een punt P. Voor krommen waarvoor $\Theta =$const. of $\Theta = 0$ (geodetische lijnen) gaat deze dus over in de torsie.

Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening

Een **massa** ofwel **populatie** is een verz. van min of meer gelijksoortige elementen.

Wet van de grote aantallen: Naarmate het aantal waarnemingen toeneemt nadert het percentage van een verschijnsel naar een grenswaarde.

De **absolute frequentie** van een verz. elementen wordt gedefinieerd als het aantal elementen in een bepaalde klasse van de verz., waarbij de elementen van de verz. in klassen zijn ingedeeld.
De **relatieve frequentie** van een klasse wordt gedefinieerd als het aantalelementen in die klasse uitgedrukt in een percentage van het totaal aantal elementen in de hele massa.
Een **frequentieverdeling** is een verdeling van de elementen van een populatie naar grootte van een bepaald kenmerk in de vorm van een histogram. De hoogte van elke kolom is gelijk aan het quotiënt van de frequentie f en de breedte k_b van de bijbehorende klasse. Deze hoogte heet de **frequentiedichtheid** $f_d \rightarrow$

$$\boxed{f_d = \frac{f}{k_b}}$$

De **modus** van een verz. elementen wordt gedefinieerd als het element dat het vaakst in de massa voorkomt.
De **mediaan** van een verz. elementen wordt gedefinieerd als het middelste van de naar grootte gerangschikte elementen.
Het **rekenkundig gemiddelde** $\overline{x}$ van een aantal elementen wordt gedefinieerd als het quotiënt van de som van hun grootte en hun aantal:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}}$$

Het **gewogen gemiddelde** $\overline{x}_w$ van een aantal elementen wordt gedefinieerd als het quotiënt van de som van de gewogen elementen en de som van de bijbehorende wegingsfactoren:

$$\boxed{\overline{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}}$$

Het **klassegemiddelde** m van een klasse van een frequentieverdeling wordt gedefinieerd als het quotiënt van het totaal aantal uitkomsten in de klasse en het aantal waarnemingen in die klasse:

$$\boxed{m = \frac{\sum x_i}{n}}$$

Als f de frequentie van een bepaalde klasse is, dan volgt hieruit voor elke klasse:

$$\boxed{\sum x_i = fm}$$

Voor het rekenkundig gemiddelde $\overline{x}_f$ van een frequentieverdeling geldt nu:

$$\boxed{\overline{x}_f = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}}$$

De **variatiebreedte** v_b van een aantal uitkomsten wordt gedefinieerd als het verschil tussen de hoogste - en laagste uitkomst:

$$\boxed{v_b = x_{max} - x_{min}}$$

De **gemiddelde afwijking** g_a t.o.v. het rekenkundig gemiddelde van een aantal uitkomsten wordt gedefinieerd als het quotiënt van de som van de absolute afwijkingen $x_i - \overline{x}$ en hun aantal:

$$\boxed{g_a = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}}$$

De **variantie** s^2 wordt gedefinieerd als het rekenkundig gemiddelde van de gekwadrateerde afwijkingen:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}}}$$

De **standaarddeviatie** σ wordt gedefinieerd als de wortel uit de variantie:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum \overline{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2 \rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2}}$$

De standaarddeviatie is - vooral bij de zgn. normale verdeling - de voornaamste spreidings maatstaf.

De **variatiecoëfficiënt** v_c is een maat voor de relatieve spreiding, uitgedrukt in een percentage, en wordt gedefinieerd als het quotiënt van de standaarddeviatie en het rekenkundig gemidddelde van een aantal uitkomsten:

$$\boxed{v_c = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\%}$$

Bij een frequentieverdeling wordt de variatiebreedte $v_{b,f}$ gedefinieerd als het verschil tussen de bovengrens van de laatste klasse en de ondergrens van de eerste klasse:

$$\boxed{v_{b,f} = k_{l,boven} - k_{e,onder}}$$

De gemiddelde afwijking $g_{a,f}$ t.o.v. het rekenkundig gemiddelde wordt nu gedefinieerd als:

$$\boxed{g_{a,f} = \frac{\sum f_i |m_i - \overline{x}|}{\sum f_i}}$$

Hierbij wordt er steeds over het aantal *klassen* gesommeerd en zijn de uitkomsten in elke klasse gelijk aan het klassegemiddelden m.

De standaarddeviatie σ_f wordt nu gedefinieerd als:

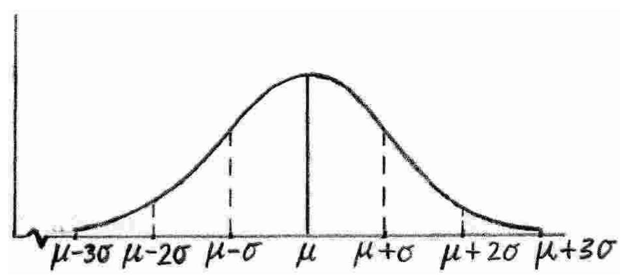
$$\boxed{\sigma_f = \sqrt{\frac{\sum f_i(m_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}}}$$

$$\frac{\sum f_i(m_i - \overline{x})^2}{\sum f_i} = \frac{f_i m_i^2}{\sum f_i} - 2\overline{x}\frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i} + \overline{x}^2\frac{\sum f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i m_i^2}{\sum f_i} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 \rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_f = \sqrt{\frac{\sum f_i m_i^2}{\sum f_i} - \overline{x}^2}}$$

Een **waarschijnlijkheidsverdeling** geeft - i.t.t. een frequentieverdeling - aan hoe een *oneindig* aantal waarnemingsuitkomsten is verdeeld; per interval is de waarschijnlijkheid (d.w.z. de te verwachten relatieve frequentie) gegeven. Het rekenkundig gemiddelde wordt hierbij aangeduid met μ.

De **normale verdeling** ofwel **Gausskromme** is een waarschijnlijkheidsverdeling die 1-toppig symmetrisch is en een vaste verhouding heeft tussen de breedte van bepaalde intervallen op de X-as en de bijbehorende delen van het oppervlak onder de kromme. Hierbij stelt het totale oppervlak onder de kromme de som van de waarschijnlijkheden voor.



De **excentriciteit** z wordt gedefinieerd als het aantal malen de standaarddeviatie σ, d.w.z. de afstand van een gegeven waarde tot het rekenkundig gemiddelde μ.
De **waarschijnlijkheid** P wordt gedefinieerd als het percentage waarnemingsuitkomsten dat in het interval tussen $\mu - z\sigma$ en μ ligt, of dus ook in het interval tussen μ en $\mu + z\sigma$.
De vorm van de Gausskromme wordt door σ bepaald. Daar voor $z = 3$ geldt dat $P = 49,9\%$, ligt dus tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$ 99,8% van de waarnemingsuitkomsten.

Een **steekproef** is een deelverz. van de populatie. Een steekproef is *representatief* als de elementen ervan (vrijwel) dezelfde eigenschappen bezitten als die van de hele populatie. Dit is het geval als de elementen *a-select* worden getrokken, d.w.z. als elk element dezelfde kans heeft om tot de steekproef te behoren, en het aantal getrokken elementen groot genoeg is.

De steekproefgemiddelden $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots$ van een populatie vormen weer een normale verdeling met een gemiddelde $\mu_{\overline{x}}$ en een standaarddeviatie $\sigma_{\overline{x}}$ waarvoor geldt:

$$\boxed{\mu_{\overline{x}} = \mu \text{ en } \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Hierin is n de omvang van de steekproef.

Als een populatie uit kwalitatieve waarnemingsuitkomsten bestaat waarbij $p\%$ van de uitkomsten een bepaald kenmerk bezit en $(100 - p)\%$ van de uitkomsten niet, dan vormen de steekproefpercentagess $p_1, p_2, p_3, \dots$ weer een normale verdeling met een gemiddelde μ_p en een standaarddeviatie σ_{p_s}, waarvoor geldt:

$$\boxed{\mu_p = p\% \text{ en } \sigma_{p_s} = \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}\%}$$

Als gebeurtenis A op n_1 en gebeurtenis B op n_2 manieren kan plaatsvinden, dan kan de combinatie van a en B op $n_1 n_2$ manieren plaatsvinden. $\rightarrow$
Als van k gebeurtenissen de 1-ste op n_1, de 2-de op $n_2, \dots,$ de k-de op n_k manieren kan plaatsvinden, dan kan de totale reeks gebeurtenissen op $n_1 n_2 \dots n_k$ manieren plaatsvinden.

Een **permutatie** van n elementen wordt gedefinieerd als 1 van de mogelijke rangschikkingen van de elementen. Het aantal permutaties van n elementen is $n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$.

Een **combinatie** van k elementen uit n elementen is 1 van de mogelijke ddeelverzamelingen van n. Daar het 1-ste element op n manieren gekozen kan worden, het 2-de op $n-1$ manieren, $\dots$, het k-de op $n-(k-1)$ manieren, kunnen k elementen dus op $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$ manieren gekozen worden. Hierbij komt elk k-tal op $k!$ permutaties voor. $\rightarrow$
Voor het aantal combinaties C_n^k van k elementen uit n elementen geldt:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}}$$

Vermenigvuldiging van teller en noemer met $(n-k)(n-k-1)\dots 3.2.1$ geeft:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Per definitie geldt: $0! = 1$ en $C_n^0 = 1$

<u>Stel</u>: $k = n-k \rightarrow k!(n-k)! = (n-k)!k! \rightarrow$

$$\boxed{C_n^k = C_n^{m-k}}$$

De **kans** $P(G)$ op de gebeurtenis G wordt gedefinieerd als het quotiënt van het aantal gunstige uitkomsten g en het aantal mogelijke uitkomsten m:

$$\boxed{P(G) = \frac{g}{m}}$$

Als g' het aantal gunstige uitkomsten is voor de gebeurtenis niet G, dan geldt:
$g + g' = m \rightarrow P(G) + P(-G) = \dfrac{g}{m} + \dfrac{g'}{m} = 1 \rightarrow$

<u>**Complementregel**</u>:

$$\boxed{P(G) + P(-G) = 1}$$

Als g_1 het aantal gunstige uitkomsten is voor de gebeurtenis G_1 en g_2 het aantal gunstige uitkomsten voo G_2, waarbij G_1 en G_2 elkaar uitsluiten, dan is $g_1 + g_2$ het aantal gunstige uitkomsten voor de gebeurtenis G, zijnde G_1 of G_2. $\rightarrow$

$P(G) = \dfrac{g_1 + g_2}{m} = \dfrac{g_1}{m} + \dfrac{g_2}{m} = P(G_1) + P(G_2) \rightarrow$

Somregel:

$$\boxed{P(G_1 \vee G_2) = P(G_1) + P(G_2)}$$

Als g_1 het aantal gunstige uitkomsten is voor de gebeurtenis G_1 en g_2 het aantal gunstige uitkomsten voo G_2, waarbij G_1 en G_2 onafhankelijk van elkaar zijn, m_1 het aantal mogelijke uitkomsten voor G_1 en m_2 het aantal mogelijke uitkomsten voor G_2, dan is $g_1 g_2$ het aantal gunstige en $m_1 m_2$ het aantal mogelijke uitkomsten voor de gebeurtenis G, zijnde G_1 en G_2. $\rightarrow$

$P(G) = \dfrac{g_1 g_2}{m_1 m_2} = \dfrac{g_1}{m_1} \cdot \dfrac{g_2}{m_2} = P(G_1)P(G_2) \rightarrow$

Produktregel:

$$\boxed{P(G_1 \wedge G_2) = P(G_1)P(G_2)}$$

Als n verzamelingen elk bestaan uit elementen van 2 verschillende soorten en de kans om uit elke verz. hetzelfde element te trekken is p, dan is de kans om het andere soort element te trekken $1 - p$. $\rightarrow$ De kans om k maal hetzelfde element te trekken in een bepaalde volgorde is $p^k(1-p)^{n-k}$. Dit geldt voor elke volgorde die dezelfde uitkomst geeft, ofwel C_n^k volgorden. $\rightarrow$

Binomiale kansverdeling: Als een samengestelde handeling uit n deelhandelingen bestaat waarbij voor elk van de deelhandelingen de kans op succes p is, dan geldt voor de kans op k successen:

$$\boxed{P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

Substitutie van $q = 1 - p$ geeft:

$$\boxed{P(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Hierbij geldt dat de kansen op resp. $0, 1, 2, \ldots, n$ successen bepaald worden door de opeenvolgende termen van de vergelijking:

$$\boxed{(q + p)^n = q^n + nq^{n-1}p + \cdots + nqp^{n-1} + p^n}$$