Trillingen

http://nl.wikipedia.org/wiki/Bestand:Simple_harmonic_oscillator.gif
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Simple_harmonic_motion_animation.gif
Samenvatting bladzijde 110:

- Trilling = Periodieke beweging om een evenwichtsstand
- Evenwichtsstand
- Uitwijking ***u***
- Amplitude ***A*** = maximale uitwijking
- Trillingstijd (periode) ***T***
- Frequentie ***f*** = aantal trillingen per seconde
- (On)gedempte trilling

$$f = \frac{1}{T}$$

Harmonische trilling

Een harmonische trilling is een belangrijke ongedempte trilling.

1. Bij een harmonische trilling geldt de 'wet van Hooke'
   De resulterende (terugdrijvende) kracht is recht evenredig met de uitwijking.
   $$F_{res} = -C \cdot u$$
   Dit is bijvoorbeeld het geval bij een ideale veer; ***C*** is dan de veerconstante.
2. Bij een harmonische trilling is het (u,t)-diagram sinusvormig[1].
   $$u(t) = A \cdot \sin(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

Wiskundig intermezzo

De twee bovenstaande definities zijn (uiteraard) gelijkwaardig. Bewijs:

$$u(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$
$$v(t) = u'(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$
$$a(t) = v'(t) = -(2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$
$$F(t) = m \cdot a(t) = -m \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = -m \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot u(t)$$
$$\rightarrow \quad C = m \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$

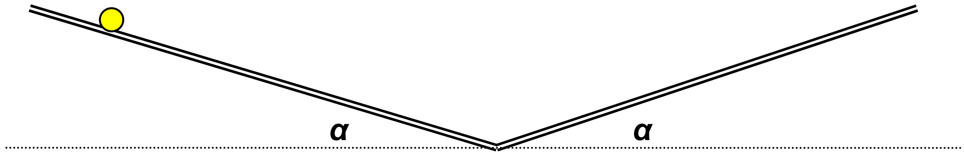
Gevolg: voor iedere harmonische trilling geldt: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$

---

[1] Indien het trillende voorwerp op t = 0 s juist (in positieve richting) door de evenwichtsstand gaat.
Het is noodzakelijk dat je rekenmachine op *radialen* staat!

Voorbeeld:

Een bal rolt over twee schuine planken heen en weer[2].

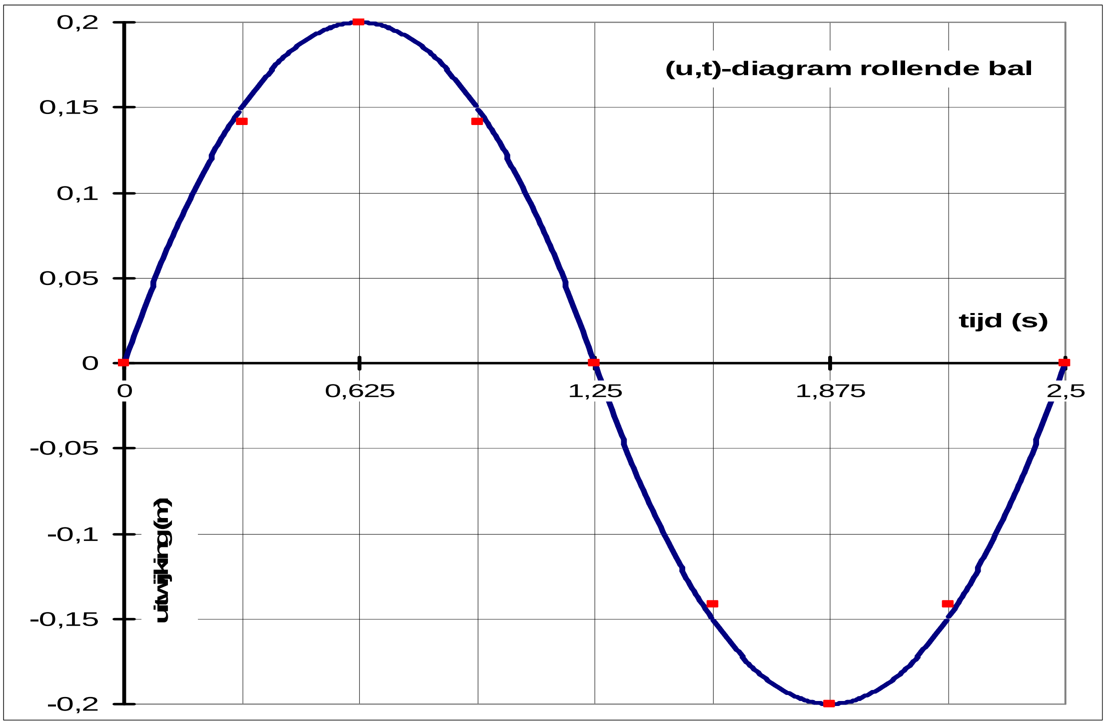


Er is sprake van een trilling, omdat de resulterende kracht op de bal voortdurend naar de evenwichtsstand gericht is.
Er is sprake van de harmonische trilling, als de terugdrijvende (resulterende) kracht evenredig is met de uitwijking.

Voor de resulterende kracht op de bal geldt: $F_{terug} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$.

Omdat ***α*** constant is (de planken zijn recht), is de terugdrijvende kracht constant en voert de bal een eenparig versnelde (vertraagde) beweging uit.
Er is dus ***geen*** sprake van een harmonische trilling.

Het (u,t)-diagram van de rollende bal is:



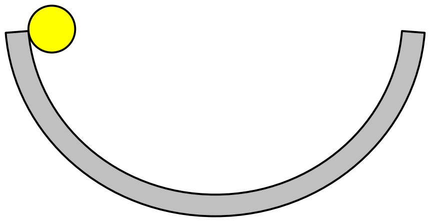
A. Hoe blijkt uit het (u,t)-diagram dat het geen harmonische trilling is?
B. Bepaal de maximale snelheid van de bal.
C. Bepaal hoek ***α*** van de planken met de horizontaal.

---

[2] De invloed van de knik onderin tussen de twee planken wordt verwaarloosd. De wrijvingskracht op de bal wordt ook verwaarloosd.

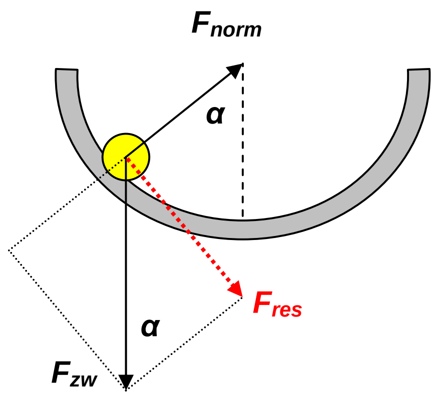
Voorbeeld:

Opdat de bal een harmonische trilling uitvoert, moet de terugdrijvende kracht groter worden als de bal verder uit de evenwichtsstand is.



Een bal rolt in een cirkelvormige goot heen en weer[3].

Er is sprake van een trilling, omdat de resulterende kracht op de bal voortdurend naar de evenwichtsstand gericht is.



Er is sprake van de harmonische trilling, als de terugdrijvende (resulterende) kracht evenredig is met de uitwijking.
Op de bal werken twee krachten:

- de normaalkracht loodrecht op de goot
- de zwaartekracht verticaal omlaag.

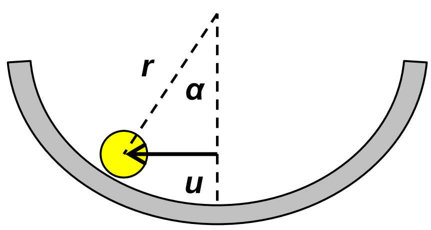
Voor de terugdrijvende kracht op de bal geldt:
$F_{terug} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$.

De terugdrijvende kracht is groter, naarmate de bal verder van de evenwichtsstand af is; dus als de uitwijking groter is.

Als hoek ***α*** 'klein' is, geldt (bij benadering[4]) voor de uitwijking ***u*** van de bal: $u = r \cdot \sin\alpha$.

Onder deze voorwaarde geldt:

$$F_{res} = -m \cdot g \cdot \frac{u}{r} = -C \cdot u.$$



De beweging is dus een harmonische trilling met

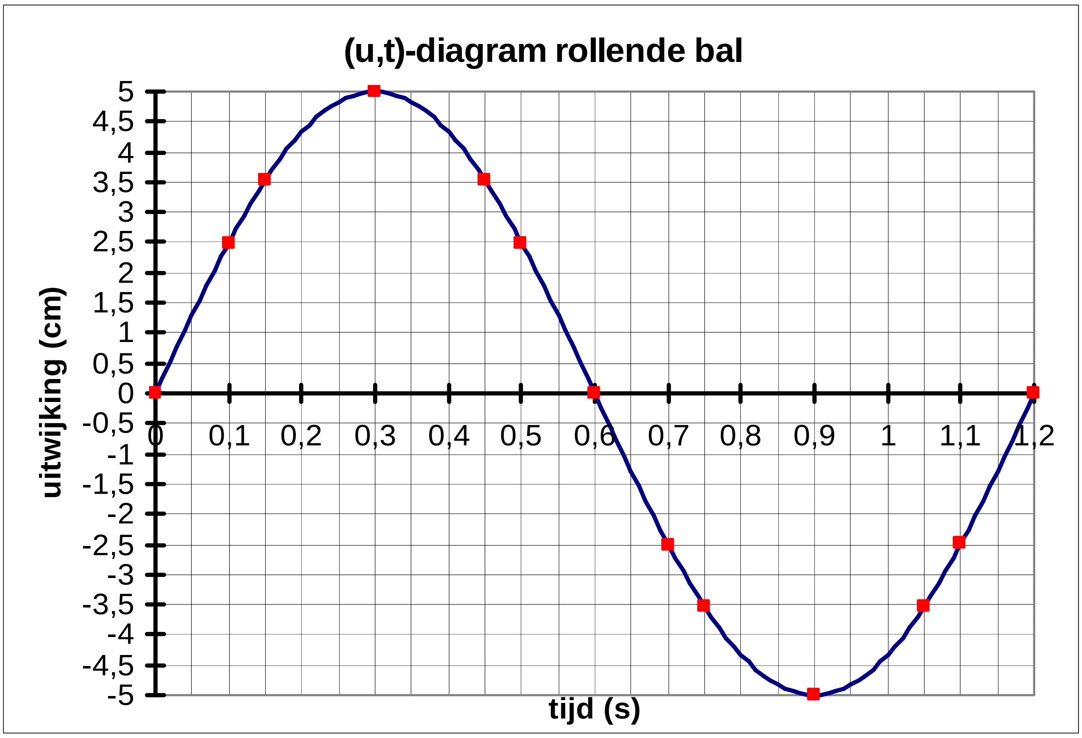
$$C = \frac{m \cdot g}{r}.$$

---

[3] De wrijvingskracht op de bal wordt opnieuw verwaarloosd.
De situatie is vergelijkbaar met een slinger: een gewicht dat aan een touw heen en weer zwaait (§ 3.4).

[4] Als hoek ***α*** 'klein' is, is de horizontale afstand van de bal tot het laagste punt ongeveer even groot als de cirkelboog.

Het (u,t)-diagram van de rollende bal is:



A. Hoe blijkt uit het (u,t)-diagram dat het een harmonische trilling is?

B. Bepaal de maximale snelheid van de bal met de 'raaklijn-methode'.

Bij een harmonische trilling geldt:

$$v_{\max} = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}$$

C. Bewijs deze formule.

D. Controleer met deze formule het antwoord op B.

E. Bewijs dat voor de trillingstijd van de bal geldt[5]:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$$

F. Bepaal de straal ***r*** van de cirkelbaan.

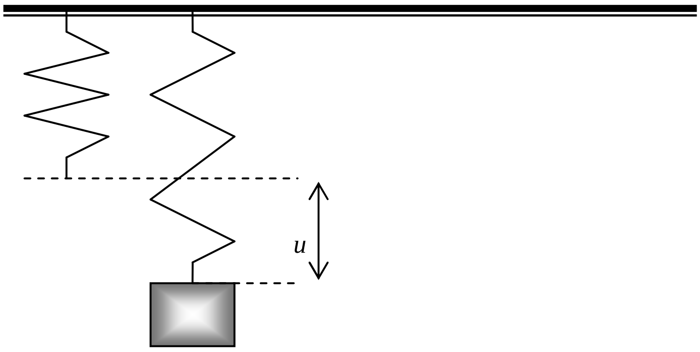
Bestudeer: § 3.1, 3.2, 3.4, 3.5
Nuttige sommen: 2, 4, 6, 14, 16, 22

---

[5] Voor de trillingstijd van een slinger geldt: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Voorbeeld:

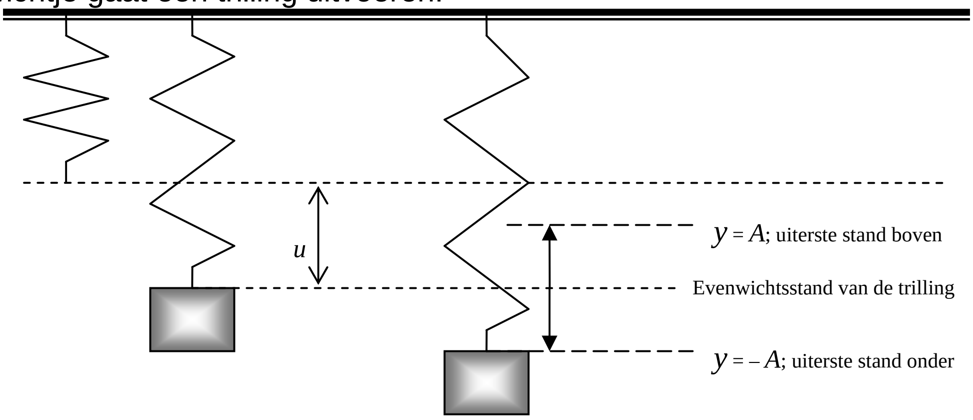
Een onbelaste veer is 18 cm lang. Aan de veer wordt een gewichtje met massa 2040 g gehangen. De lengte van de veer wordt hierdoor 28 cm.



Bereken de veerconstante *C*.

$$F_{zw} = F_{veer} \quad \leftrightarrow \quad m \cdot g = C \cdot u \quad \rightarrow \quad C = \frac{m \cdot g}{u} = \frac{2{,}040 \cdot 9{,}8}{0{,}10} = 2{,}0 \cdot 10^2 \ N/m$$

Het gewichtje wordt vervolgens 4 cm (extra) omlaag getrokken en losgelaten. Het gewichtje gaat een trilling uitvoeren.



Afspraak: Voor de uitrekking van de veer gebruik ik *u*.
Voor de uitwijking van de trilling gebruik ik *y*.

Neem aan dat de wrijving mag worden verwaarloosd. Er is dan sprake is van een (ongedempte) harmonische trilling.

Bereken de grootte van de resulterende kracht in de uiterste (onderste) stand.

Methode 1 Op het blokje werken twee krachten
De veerkracht (omhoog): $F_{veer} = C \cdot u = 2{,}0.10^2 \cdot 0{,}14 = 28\ N$
De zwaartekracht (omlaag): $F_{zw} = m \cdot g = 2{,}040 \cdot 9{,}8 = 20\ N$
De resulterende kracht is dus: 28 – 20 = 8 N omhoog.

Methode 2 Voor de terugdrijvende kracht in de uiterste stand geldt:
$F_{terug} = C \cdot A = 2{,}0.10^2 \cdot 0{,}04 = 8\ N$.

§ 3.3 Fase en faseverschil

Samenvatting bladzijde 122:

- Fase ***φ***: aantal trillingen vanaf t = 0 s
- $\varphi = \dfrac{t}{T}$

  De uitkomst een getal zonder eenheid en mag als breuk worden genoteerd.
- Faseverschil ***Δφ***:

  Faseverschil geeft aan in welke mate de trillingen 'gelijk op' gaan.

  Het verschil in fase tussen twee tijdstippen van één trilling $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta t}{T}$

  Het verschil in fase tussen twee trillende voorwerpen $\Delta\varphi = \dfrac{t}{T_A} - \dfrac{t}{T_B}$
- Gereduceerde fase ***φ**r*: het deel van één trilling, dat reeds is uitgevoerd
- In fase trillen (zie opgave 9b) en in tegenfase trillen

  Als de trillingen 'in de pas lopen', is het (gereduceerde) faseverschil *Δφ* = 0.

  Als de trillingen 'uit de pas lopen', is het (gereduceerde) faseverschil *Δφ* = ½.

Bestudeer: § 3.3
Nuttige sommen: 9, 12

Oefenopgave

Slinger A heeft een trillingstijd van 2,0 s; slinger B een trillingstijd van 5,0 s.
Op t = 0 s gaan A en B beide door hun evenwichtsstand in positieve richting.
Bereken op welke tijdstippen, gelegen binnen het tijdsinterval [0 s; 10 s] het gereduceerde faseverschil gelijk is aan nul.

Oplossing:
A heeft een kleinere trillingstijd; $\varphi_A \geq \varphi_B$.
Het faseverschil tussen A en B is:

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = \frac{t}{T_A} - \frac{t}{T_B}.$$

Het gereduceerde faseverschil is 0,
als het faseverschil gelijk is aan een geheel getal *k* (0, 1, 2, 3, ...)

$$\rightarrow \quad \frac{t}{2{,}0} - \frac{t}{5{,}0} = \frac{5{,}0 \cdot t - 2{,}0 \cdot t}{10} = \frac{3{,}0 \cdot t}{10} = k$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{k \cdot 10}{3{,}0} = 3{,}3 \cdot k \quad \rightarrow \quad t = 0\ s,\ 3{,}3\ s,\ 6{,}6\ s,\ 9{,}9\ s$$

§ 3.6 Energie van een harmonische trilling

Een harmonische trilling is een ongedempte trilling; de totale hoeveelheid energie blijft constant[6]: ***E_{tril}***
Kinetische en potentiële energie worden voortdurend in elkaar omgezet.

1. <u>Het voorwerp bevindt zich in de evenwichtsstand</u>

   De snelheid van het voorwerp is maximaal: $v_{\max} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}$

   Het voorwerp heeft alleen kinetische energie: $E_{tril} = E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dfrac{2 \cdot \pi \cdot A}{T}\right)^2$

2. <u>Het voorwerp bevindt zich in de uiterste stand</u>
   De snelheid van het voorwerp is nul; de uitwijking is maximaal: *A*
   Het voorwerp heeft alleen potentiële energie: $E_{tril} = E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2$

Beide bovenstaande formules voor de energie zijn 'gelijk', omdat $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m}{C}}$. Ga na.

3. <u>Het voorwerp bevindt zich in een willekeurige stand</u>
   Het voorwerp heeft kinetische + potentiele energie:
   $E_{tril} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$

De formules voor de trillingsenergie bij 1. en 2. zijn bijzondere gevallen van de algemene formule bij 3. Ga na.

http://www.walter-fendt.de/ph14nl/springpendulum_nl.htm

Bestudeer: § 3.6
Nutige sommen: 24, 25

§ 3.7 Resonantie

Een 'gedwongen' trilling is een trilling veroorzaakt door een kracht van buitenaf.
Voorwerpen hebben 'eigenfrequenties'. De frequentie(s) waarmee het voorwerp uit zichzelf 'wil' trillen.
Als de frequnetie van de gedwongen trilling gelijk is aan de eigenfrequentie, is er sprake van resonantie. De amplitude van de trilling wordt groot, omdat de energieoverdracht maximaal is.

Voorbeeld: http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw

Nutige sommen: 29, 30, 31

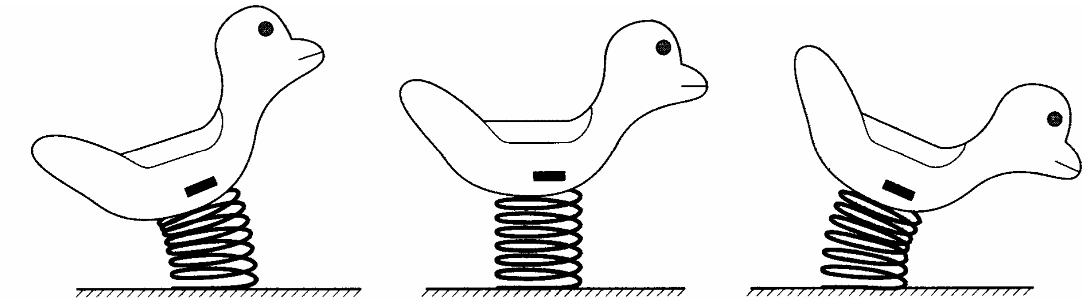
---

[6] Bij een gedemptre trilling zal er trillingsenergie verdwijnen; door wrijving ontstaat er warmte.

Naar VWO 1999-*I*   Opgave 3 Schommelbeest

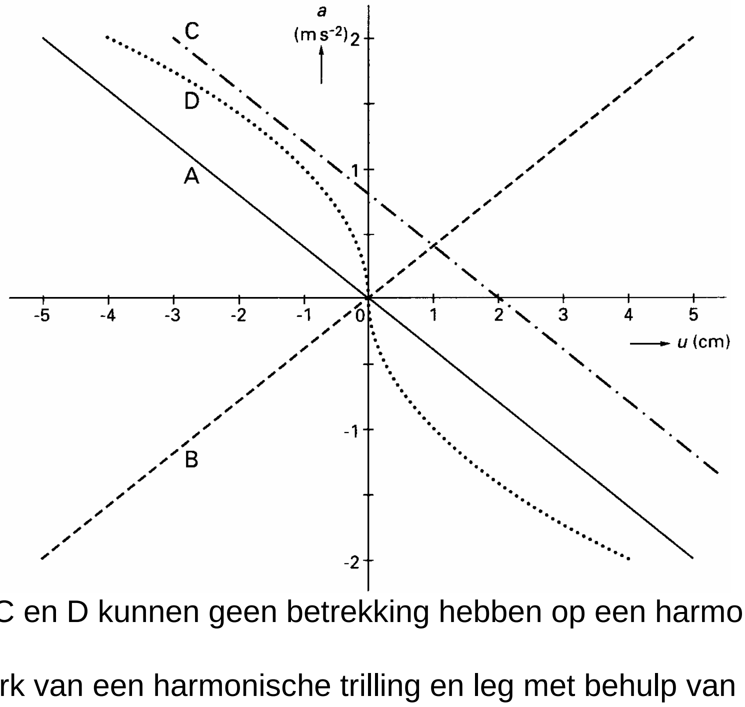
In stadsparken tref je vaak 'schommelbeesten' aan. Schommelbeesten zijn 'beestachtige' constructies die op een stugge veer in de grond bevestigd zijn. Kinderen kunnen hier leuk op schommelen. Zo'n schommelbeest wordt een eindje uit zijn evenwichtsstand getrokken en vervolgens losgelaten. Zie figuur 1.

figuur 1



Van de beweging van het zwaartepunt is een (u,t)-diagram geregistreerd met behulp van een plaatssensor. Vervolgens is aan de hand van dit diagram de versnelling bepaald voor verschillende waarden van de uitwijking van het zwaartepunt. De beweging blijkt een harmonische trilling te zijn. In figuur 2 is in grafiek A de versnelling a uitgezet tegen de uitwijking u.

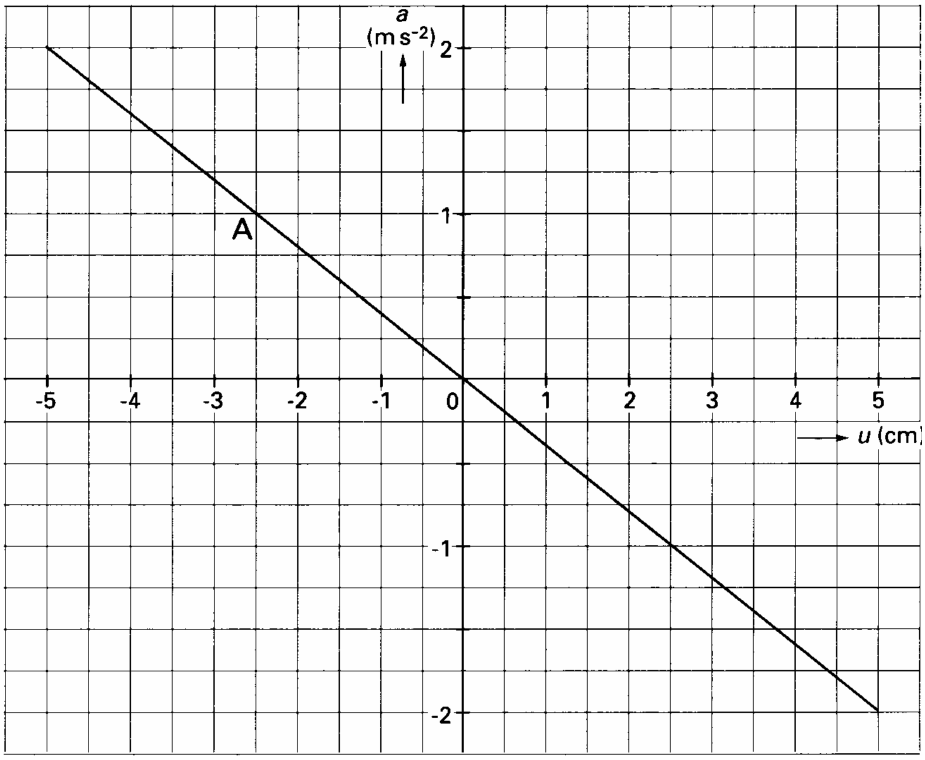
figuur 2



De grafieken B, C en D kunnen geen betrekking hebben op een harmonische trilling.

A Geef een kenmerk van een harmonische trilling en leg met behulp van dat kenmerk uit waarom ieder van de grafieken B, C en D niet bij een harmonische trilling horen.

B Toon met onderstaande figuur aan dat de schommelfrequentie 1,0 Hz is.
(Hint: leid eerst een relatie af tussen *a*(*t*), *u*(*t*) en *f* voor een harmonische trilling.)



C Bepaal de maximale snelheid van het schommelbeest.

De massa van het schommelbeest is 10 kg.
D Bereken of bepaal de krachtconstante *C*.

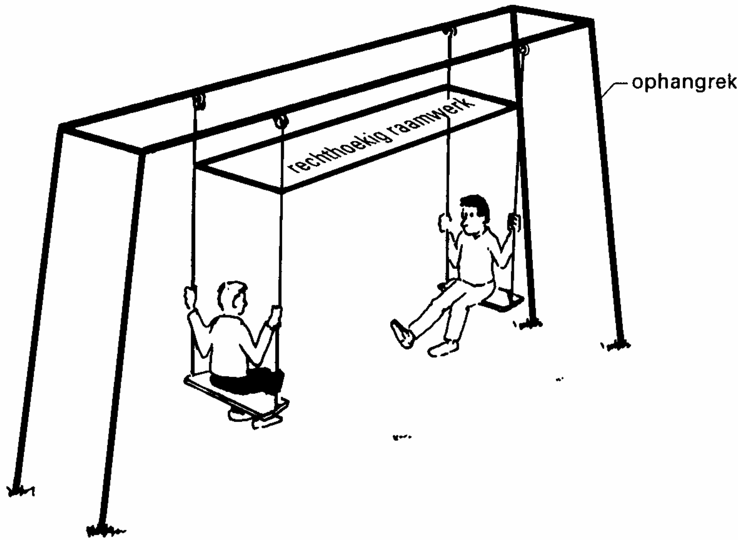
E Leg uit of de schommelfrequentie
- ❑ groter wordt
- ❑ gelijk blijft
- ❑ kleiner wordt

als een kindje op het schommelbeest zit.

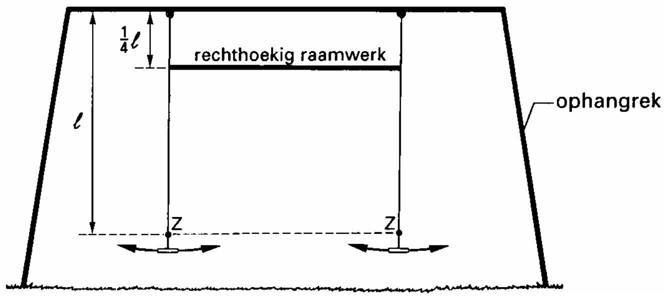
Naar VWO 1997-*I* Opgave 2 Gekoppelde schommels

In een speeltuin hangen twee schommels aan een ophangrek.
De soepele touwen waar de twee schommels aan hangen, zijn door middel van een star rechthoekig raamwerk met elkaar verbonden. Zie figuur 5. Deze figuur is niet op schaal. De schommels kunnen slechts schommelen in het vlak van tekening van figuur 6.

figuur 5



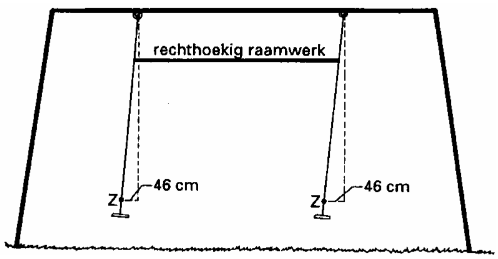
figuur 6



Op iedere schommel zit een kind, zodanig dat de zwaartepunten zich op gelijke afstanden *l* van de bovenkant van het ophangrek bevinden. De kinderen zijn even zwaar. Het rechthoekige raamwerk bevindt zich op een kwart van de afstand *l* onder het ophangrek. De massa van het raamwerk is verwaarloosbaar ten opzichte van die van de kinderen.
In het vervolg van deze opgave bekijken we drie situaties. De kinderen gaan namelijk op drie verschillende manieren schommelen. Ze worden steeds vanuit verschillende beginposities zonder beginsnelheid op t = 0 losgelaten. Ze blijven daarna op hun schommel zitten zonder voor een extra aandrijfkracht te zorgen.

Eerste situatie.
De eerste keer beginnen beide kinderen links van de evenwichtsstand. De uitwijking van de zwaartepunten is dan 46 cm. Zie figuur 7.
In figuur 8 is de uitwijking van het rechter zwaartepunt als functie van de tijd weergegeven.

figuur 7

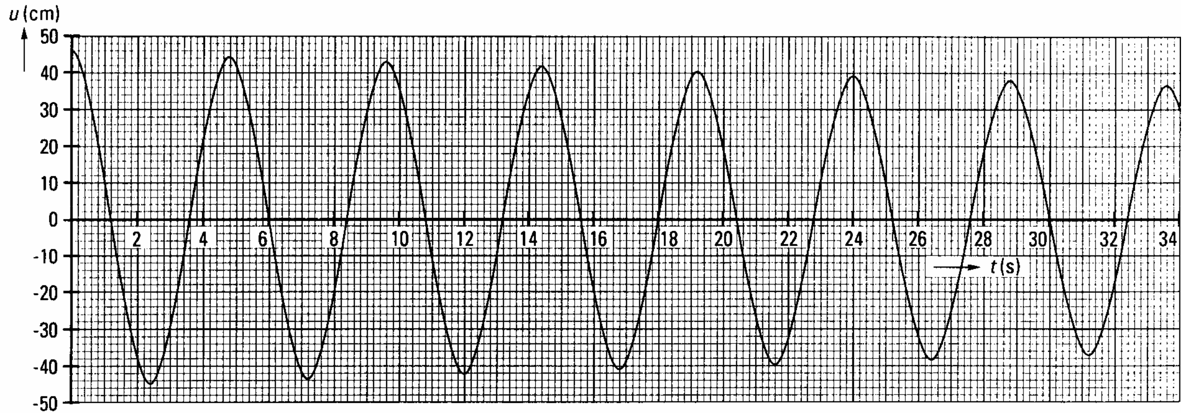


A Bepaal met behulp van figuur 8 de maximale snelheid die het zwaartepunt van de rechter schommel bereikt gedurende zijn derde zwaai naar links.
Geef de uitkomst in twee significante cijfers.

Ook het raamwerk slingert.

B Teken in figuur 8 de uitwijking van het raamwerk als functie van de tijd tussen t = 0 en t = 6 s.

figuur 8



C1 Hoe is in figuur 8 te zien dat er sprake is van een gedempte trilling?

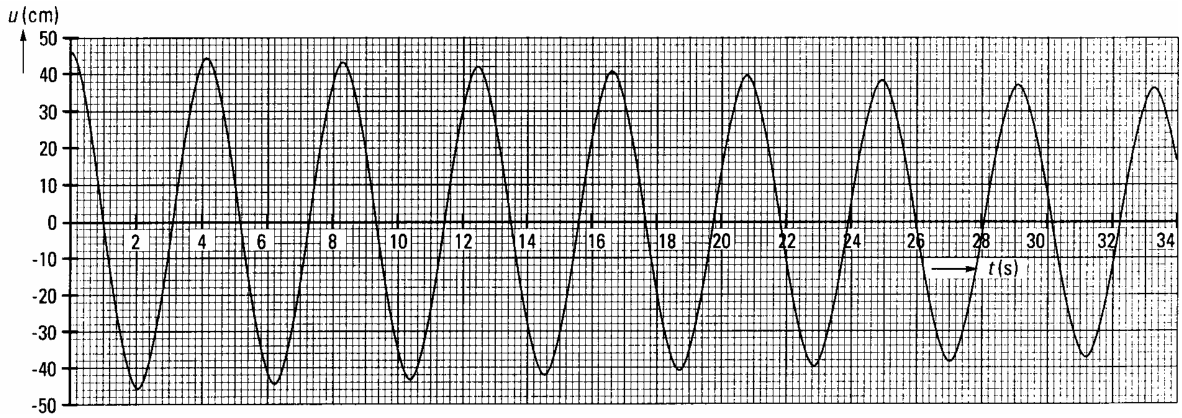
C2 Bepaal hoeveel procent van de trillingsenergie in de eerste 24 s ‘verloren’ gaat.

Tweede situatie.
De tweede keer beginnen beide kinderen weer met een beginuitwijking van 46 cm te schommelen. Nu begint het rechter kind met een uitwijking naar links en het linker kind met een uitwijking naar rechts.

In figuur 9 is weer de uitwijking van het rechter zwaartepunt tegen de tijd uitgezet. Uit deze figuur blijkt dat de slingertijd korter is dan bij de eerste keer.

D1 Leg uit waarom de slingertijd nu korter is.
D2 Leg uit hoeveel keer zo kort de slingertijd nu is en controleer je antwoord in figuur 9.

figuur 9



Derde situatie.
Tot slot nemen ze de volgende beginposities in: de linker schommel begint in de evenwichtsstand, terwijl het rechter zwaartepunt met een uitwijking van 92 cm naar links begint.
De uitwijking van de rechter schommel blijkt nu steeds gelijk te zijn aan de som van de uitwijkingen zoals weergegeven in de figuren 8 en 9. Deze schommel slingert dan zodanig, dat de amplitude met een vaste regelmaat toe- en afneemt. Rond t = 15,5 s is de amplitude van de rechter schommel vrijwel gelijk aan nul, omdat de twee te sommeren trillingen van de figuren 8 en 9 dan met elkaar in tegenfase zijn.

E Beredeneer rond welk eerstvolgend tijdstip de amplitude van de rechter schommel weer gelijk is aan nul.