Über die akustische Strahlungsleistung von Strahlergruppen, insbesondere der Kreis- und Kugelgruppen.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Electroacustic G. m. b. H., Kiel.)

Von **F. A. Fischer**, Kiel.

DK **534. 213**

1. Einleitung.

Die Berechnung der akustischen Strahlungsleistung von Strahlern und Strahlergruppen kommt prinzipiell auf eine räumliche Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik hinaus. Für verschiedene Membrantypen und Kombinationen von Membranen hat kürzlich H. Stenzel[1]) durch direkte Integration über das Quadrat ihrer Richtcharakteristik die Strahlungsleistung ermittelt. Bei einigen der in der nachstehenden Arbeit behandelten, praktisch wichtigen Strahlergruppen bereitet die Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik analytische Schwierigkeiten. Es wird dann mit Vorteil eine von Lord Rayleigh[2]) gegebene allgemeine Formel für die Strahlungsleistung einer Gruppe benutzt. Diese Formel hat Rayleigh dadurch gewonnen, daß er die Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik in der allgemeinen Formel für die Strahlungsleistung einer beliebigen Gruppe ausführte. Es kann also nach dieser Formel die Strahlungsleistung einer speziellen Gruppe ausgerechnet werden, ohne daß die Richtcharakteristik berechnet zu werden braucht. Die Rayleighsche Formel führt in vielen Fällen zu analytisch bequem zu handhabenden Ausdrücken. Es soll zunächst ihre Ableitung in einer Form wiedergegeben werden, die den Zusammenhang mit den allgemeinen Formeln von Stenzel (loc. cit.) klar erkennen läßt.

2. Die Rayleighsche Formel für die Strahlungsleistung von Gruppen.

Das Geschwindigkeitspotential der von einem einzelnen Strahler ausgehenden Welle ist gegeben durch

$$\Phi_\nu = -\frac{A_\nu}{\Omega \cdot r_\nu} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{r_\nu}{a}\right) + \varphi_\nu'\right\}. \tag{1}$$

Hierin bedeuten:

A_ν die Intensität des Strahlers,
r_ν seine Entfernung vom Aufpunkt,
ω die Kreisfrequenz,
a die Schallgeschwindigkeit,
φ_ν' eine künstliche Phasenverschiebung, und
Ω der räumliche Winkel, in den der Strahler strahlt.

Im folgenden sollen die Strahler selbst klein zur Wellenlänge, also ungerichtet sein, und in den ganzen Raum gleichmäßig strahlen. Dann ist $\Omega = 4\pi$ zu setzen und das Geschwindigkeitspotential lautet in komplexer Schreibweise

$$\Phi_\nu = \Re\left(-\frac{A_\nu}{4\pi r_\nu} e^{-ikr_\nu + \varphi_\nu'} \cdot e^{i\omega t}\right), \tag{2}$$

wenn „$\Re f$" wie üblich „reeller Teil von f" bedeutet und $k = \frac{\omega}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}$ gesetzt wird.

---

[1]) H. Stenzel: Über die akustische Strahlung von Membranen. Ann. d. Phys. 5. Folge, **7**, 1930, Nr. 8, S. 947 bis 982.

[2]) Lord Rayleigh: On the production and distribution of sound. Phil. Mag. 1903, S. 289—305.

Das resultierende Geschwindigkeitspotential der ganzen Gruppe ist also

$$\Phi_{\mathrm{res}} = \sum_{\nu=1}^{n} \Re\left(-\frac{1}{4\pi} A_\nu \frac{e^{-ik r_\nu + \varphi_\nu'}}{r_\nu} e^{i\omega t}\right). \tag{3}$$

Führt man hier den Abstand R des Aufpunktes von einem mittleren Punkt der Strahlergruppe, etwa ihrem Schwerpunkt, ein, so entsteht mit $\xi_\nu = R - r_\nu$:

$$\Phi_{\mathrm{res}} = \Re\left(-\frac{1}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{e^{-ikR + ik\xi_\nu + \varphi_\nu'}}{R - \xi_\nu} e^{i\omega t}\right) \tag{4}$$

$$= \Re\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ikR}}{R}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{e^{ik\xi_\nu + \varphi_\nu'}}{1 - \frac{\xi_\nu}{R}} e^{i\omega t}\right). \tag{5}$$

Der Aufpunkt sei so weit von der Strahlergruppe entfernt, daß

$\frac{\xi_\nu}{R} \ll 1$ ist; dann kann in (5) der Nenner $1 - \frac{\xi_\nu}{R}$ weggelassen werden. (6)

Es sei nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu e^{ik\xi_\nu + \varphi_\nu'} = A_{\mathrm{res}} e^{i\chi_{\mathrm{res}}}. \tag{7}$$

$$\frac{A_{\mathrm{res}}}{\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu e^{ik\xi_\nu + \varphi_\nu'}}{\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu} \tag{8}$$

ist die allgemeine Formel für die Richtcharakteristik einer Gruppe, der Stenzelsche „Richtfaktor".

Mit diesen Abkürzungen lautet das resultierende Geschwindigkeitspotential der Gruppe

$$\Phi_{\mathrm{res}} = \Re\left(-\frac{A_{\mathrm{res}}}{4\pi R} e^{-ikR + \chi_{\mathrm{res}}} e^{i\omega t}\right) = -\frac{A_{\mathrm{res}}}{4\pi R}\cos\{k(at - R) + \chi_{\mathrm{res}}\}. \tag{9, 10}$$

Es geht also von der Gruppe eine Kugelwelle aus, deren Intensität und Phase von der Richtung abhängt.

Ist u die Geschwindigkeit und p der Druck, so ist die durch eine die Gruppe umschließende Kugelfläche K, deren Radius gleich R sei, in der Zeit T wandernde Energie gegeben durch

$E = \int_K \int_0^T u\, p\, dt\, dK$ oder, da $p = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ (wenn ϱ die Dichte des Mediums ist) und $u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$: (11)

$$E = \int_K \int_0^T -\frac{1}{4\pi R^2} \varrho\, \omega \frac{A_{\mathrm{res}}^2}{4\pi R} \sin\{k(at - R) + \chi_{\mathrm{res}}\}\cos\{k(at - R) + \chi_{\mathrm{res}}\}\, dt\, dK$$
$$+ \int_K \int_0^T \frac{1}{4\pi}\frac{A_{\mathrm{res}}^2}{4\pi R^2} k^2 a\, \varrho \sin^2\{k(at - R) + \chi_{\mathrm{res}}\}\, dt\, dK. \tag{12}$$

Ist T ein ganzzahliges Vielfaches einer Periode, so verschwindet das erste Integral, und es ergibt sich für die mittlere Leistung in einer Periode

$$L = \int_K \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{4\pi}\frac{A_{\mathrm{res}}^2}{4\pi R^2} k^2 a\, \varrho \sin^2\{k(at - R) + \chi_{\mathrm{res}}\}\, dt\, dK \tag{13}$$

$$\text{oder } L = \frac{1}{8\pi} k^2 a\, \varrho \frac{\int_K A_{\mathrm{res}}^2\, dK}{4\pi R^2}. \tag{14}$$

Dies ist die allgemeine Formel für die von einer beliebigen Gruppe abgestrahlte Leistung. Nach ihr kann bei bekannter Richtcharakteristik die Strahlungsleistung berechnet werden.

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_K \frac{A_{\mathrm{res}}^2}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^2}\,\mathrm{d}K \tag{15}$$

entspricht dem Stenzelschen „Strahlungsfaktor".

Es soll nun in dieser allgemeinen Formel die Integration durchgeführt werden.

Es ist

$$A_{\mathrm{res}}^2 = \left|\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu\, e^{i(k\xi_\nu + \varphi_\nu')}\right|^2, \tag{16}$$

also nach einfacher Umformung [3])

$$A_{\mathrm{res}}^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} A_\mu A_\nu \cos(k[\xi_\mu - \xi_\nu] + \varphi_\mu' - \varphi_\nu'). \tag{19}$$

Also ist

$$\int_K A_{\mathrm{res}}^2\,\mathrm{d}K = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} A_\mu A_\nu \int_K \cos(k[\xi_\mu - \xi_\nu] + \varphi_\mu' - \varphi_\nu')\,\mathrm{d}K \tag{20}$$

oder, wenn der gegenseitige Abstand der Strahler μ und ν mit $d_{\mu\nu}$ bezeichnet wird,

$$= R^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{n} A_\mu A_\nu \int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(k\,d_{\mu\nu}\sin\psi + \varphi_\mu' - \varphi_\nu')\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\vartheta \tag{21}$$

$$= 2\pi R^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{A_\mu A_\nu}{k\,d_{\mu\nu}} \int_{-k d_{\mu\nu} + \varphi_\mu' - \varphi_\nu'}^{k d_{\mu\nu} + \varphi_\mu' - \varphi_\nu'} \cos x\,\mathrm{d}x \tag{22}$$

$$= 4\pi R^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{A_\mu A_\nu}{k\,d_{\mu\nu}} [\sin(k\,d_{\mu\nu} + \varphi_\mu' - \varphi_\nu') + \sin(k\,d_{\mu\nu} - [\varphi_\mu' - \varphi_\nu'])]. \tag{23}$$

So entsteht schließlich die Rayleighsche Formel für die effektive Strahlungsleistung einer Gruppe

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a\varrho \sum_{\mu,\nu=1}^{n} A_\mu A_\nu \frac{\sin k\,d_{\mu\nu}\cdot\cos(\varphi_\mu' - \varphi_\nu')}{k\,d_{\mu\nu}}. \tag{24}$$

Aus dieser Formel folgert Rayleigh für den Fall, daß die Intensitäten aller Strahler gleich A sind, die Gruppe nicht kompensiert, also $\varphi_\mu' = \varphi_\nu' \equiv 0$ und alle $d_{\mu\nu}$ ganzzahlige Vielfache der halben Wellenlänge sind, einen wichtigen Satz.

Es ist nämlich

$$L_{d_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\cdot\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{8\pi} k^2 a\varrho\, n A^2 \tag{25}$$

für ganzzahlige, von Null verschiedene $g_{\mu\nu}$, während für verschwindende $d_{\mu\nu}$

$$L_{d_{\mu\nu}=0} = \frac{1}{8\pi} k^2 a\varrho\, n^2 A^2 \text{ ist.} \tag{26}$$

Es ist also

$$\frac{L_{d_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\cdot\frac{\lambda}{2}}}{L_{d_{\mu\nu}=0}} = \frac{1}{n}, \tag{27}$$

d. h. in Worten: Soll an einer Stelle des Raumes eine bestimmte Intensität (nA) erzeugt werden, so bringt eine Aufteilung der dazu erforderlichen Quelle in eine Gruppe von n Einzelstrahlern, deren gegenseitige Abstände sämtlich ganze Vielfache von $\lambda/2$ sind, eine Leistungsersparnis von $1:n$.

[3]) Infolge einiger Kürzungen sind die Formeln nicht fortlaufend beziffert. Die Schriftltg.

Die Formel für die Strahlungsleistung einer geraden Gruppe, die zuerst von Stenzel (loc. cit.) auf dem Wege über ihre Richtcharakteristik abgeleitet und diskutiert worden ist, kann aus der Rayleighschen Formel ohne weiteres abgelesen werden.

Es wird
$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho \left(n A^2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} 2 (n-\nu) \frac{\sin \nu k d}{\nu k d} \right) \tag{28}$$

oder
$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho\, n^2 A^2 \left(\frac{1}{n} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu) \frac{\sin \nu k d}{\nu k d} \right). \tag{29}$$

Rayleigh selbst hat in der vorerwähnten Arbeit seine Formel mit Erfolg auch zur Berechnung von Strahlern, die groß zur Wellenlänge sind, benutzt. Die Strahlungsgebilde werden zu diesem Zweck als kontinuierliche Gruppen aufgefaßt. Eines seiner praktisch wichtigsten Beispiele hierfür ist die in einer starren Wand schwingende Kolbenmembran. Es ist bemerkenswert, daß Rayleigh im 2. Band seiner Theorie of sound dieselbe Formel am Beispiel der Kolbenmembran in starrer Wand auf einem völlig anderen Wege, und zwar ganz ohne auf die Richteigenschaften des Gebildes einzugehen, gewinnt, nämlich durch direkte Ausrechnung des gesamten auf die Membran wirkenden Druckes, dessen Wattkomponente, multipliziert mit der Geschwindigkeit der Membran, ebenfalls die Strahlungsleistung ergibt.

3. Die Strahlungsleistung der Kreisgruppe ohne künstliche Phasenverschiebung.

Zur Erzeugung eines scharfen Richtstrahls spielt die Kreisgruppe eine wichtige Rolle. Bei ihr stößt die Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik, wenn der Kreis nicht so dicht mit Strahlern besetzt ist, daß man sich auf das erste Glied der Reihenentwicklung für die Richtcharakteristik beschränken darf, auf Schwierigkeiten. Es soll daher die Rayleighsche Formel benutzt werden.

Bezeichnet man den Kreisdurchmesser mit d, so wird
$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho A^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi\right)}{k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi}. \tag{30}$$

Diese Formel läßt sich noch wesentlich vereinfachen.

Es ist, wenn mit J_q die Besselsche Funktion q-ter Ordnung bezeichnet wird,
$$\cos(x \sin\omega) = J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \cos 2 p \omega, \tag{31}$$

also
$$\frac{\sin(x \sin\omega)}{x \sin\omega} = \frac{1}{x}\int_0^x J_0(\xi)\, d\xi + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x}\int_0^x J_{2p}(\xi)\, d\xi \cos 2 p \omega. \tag{32}$$

Es wird daher
$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi\right)}{k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi} = n^2 \frac{1}{kd}\int_0^{kd} J_0(\xi)\, d\xi + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{kd}\int_0^{kd} J_{2p}(\xi)\, d\xi \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \cos 2 p \frac{\mu-\nu}{n}\pi. \tag{33}$$

Nun ist
$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \cos 2 p \frac{\mu-\nu}{n}\pi = n + 2 \sum_{\sigma=1}^{n-1} (n-\sigma) \cos 2 \sigma \frac{p\pi}{n} \tag{34}$$

$$= \left(\frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p\pi}{n}}\right)^2 = \begin{cases} 0, \text{ wenn } p \not\equiv 0 \pmod{n} \\ n^2, \text{ wenn } p \equiv 0 \pmod{n}. \end{cases} \tag{35, 36}$$

Also wird für beliebiges n
$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho\, n^2 A^2 \left[\frac{1}{kd}\int_0^{kd} J_0(\xi)\, d\xi + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{kd}\int_0^{kd} J_{2qn}(\xi)\, d\xi \right]. \tag{37}$$

Diese Reihe konvergiert sehr rasch. Für hinreichend großes n

$$\left(\text{praktisch schon für } n > \frac{\pi d}{\lambda} + 1^{4)}, \text{ da } \mathrm{J}_\nu(\nu - 2) \angle 0{,}07\right)$$

ergibt sich die bereits von Rayleigh (l. c.) gegebene Formel für die Strahlungsleistung der Kreislinie:

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho (n A)^2 \frac{1}{k d} \int_0^{k d} \mathrm{J}_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi . \tag{38}$$

Der Verlauf des Strahlungsfaktors $\frac{1}{k d} \int_0^{k d} \mathrm{J}_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ in Abhängigkeit von $k d$ ist in Abb. 1 gezeichnet. Die Funktion $\int_0^x \mathrm{J}_0(t)\, \mathrm{d}t$ ist für die Argumente 0 bis 1 tabuliert in Watson, Theorie of Bessel Functions, Cambridge 1922. Für größere Argumentwerte kann sie nach der Formel

$$\frac{1}{2} \int_0^x \mathrm{J}_0(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \pi x \{ \mathrm{J}_0(x) \mathrm{H}_0'(x) + \mathrm{J}_1(x) \mathrm{H}_0(x) \} \tag{39}$$

(Watson, S. 752) berechnet werden. Hierin ist H_0 die Struvesche Funktion nullter Ordnung. Für diese gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{H}_0(z) = \frac{2}{\pi} - \mathrm{H}_1(z), \tag{40}$$

wo H_1 die Struvesche Funktion erster Ordnung ist (Watson, S. 329). $\mathrm{H}_0(z)$ und $\mathrm{H}_1(z)$ sind in dem Buch von Watson tabuliert für die Argumentwerte 0 bis 16.

Die Funktionen $\int_0^x \mathrm{J}_\nu(t)\, \mathrm{d}t$ können nach der Formel

$$\int_0^x \mathrm{J}_\nu(t)\, \mathrm{d}t = 2 \sum_{n=0} \mathrm{J}_{\nu + 2n + 1}(x) \tag{41}$$

(Watson, S. 545) berechnet werden.

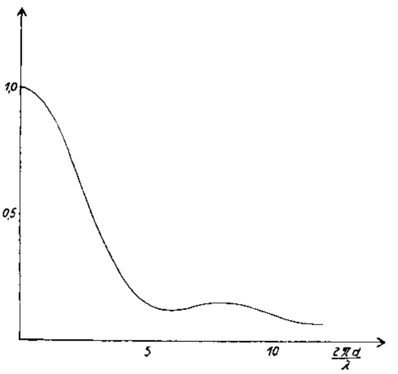

Abb. 1. Der Strahlungsfaktor der Kreisgruppe.

Die kleineren Schwankungen der Leistung als Funktion von $k d = \frac{2\pi d}{\lambda}$ sind physikalisch durch die bei wachsendem $\frac{d}{\lambda}$ entstehenden Nebenmaxima der Richtcharakteristik bedingt.

4. Die Strahlungsleistung der in ihrer Ebene kompensierten Kreisgruppe.

Die Aufgabe der künstlichen Drehung eines Richtstrahls in einer Ebene (bei feststehender Gruppe) wird durch die in ihrer Ebene kompensierte Kreisgruppe[5]) gelöst. Bei ihr ist die Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik auch bei sehr dichter Strahlerbesetzung besonders umständlich, weil die Richtcharakteristik nicht rotationssymmetrisch ist. Es soll daher auch hier die Rayleighsche Formel angewandt werden.

Ist α' die Kompensationsrichtung, d. h. diejenige Richtung, für die Gleichphasigkeit aller Strahler vorhanden sein soll, so muß

$$\varphi_\mu' = -\frac{\pi d}{\lambda} \cos\left(\alpha' + \mu \frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad \varphi_\nu' = -\frac{\pi d}{\lambda} \cos\left(\alpha' + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \tag{42, 43}$$

sein. Es ist also

$$\varphi_\mu' - \varphi_\nu' = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\left(\alpha' + \frac{\mu + \nu}{n} \pi\right) \cdot \sin \frac{\mu - \nu}{n} \pi . \tag{45}$$

Für die Strahlungsleistung ergibt sich damit nach Formel (24)

[4]) Vgl. H. Stenzel: ENT, 6, 1929, S. 165–181, im folgenden als a. a. O. bezeichnet.
[5]) Siehe H. Stenzel, a. a. O.

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho A^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi\right) \cdot \cos\left\{k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi \sin\left(\alpha' + \frac{\mu+\nu}{n}\pi\right)\right\}}{k d \sin \frac{\mu-\nu}{n}\pi}, \tag{46}$$

oder, wenn $|\mu - \nu| = \sigma$ gesetzt wird

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho A^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} \frac{\sin\left(k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}\right)}{k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}} \cos\left\{k d \sin \frac{\sigma\pi}{n} \sin\left(\alpha' + \frac{2\varkappa+\sigma}{n}\pi\right)\right\}, \tag{47}$$

wobei

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma = 0, \\ 2 & \text{für } \sigma > 0. \end{cases} \tag{48}$$

Setze vorübergehend zur Abkürzung

$$k d \sin \frac{\sigma\pi}{n} = x \quad \text{und} \quad \alpha' + \frac{\sigma\pi}{n} = y. \tag{49, 50}$$

Dann ist

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho A^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{\sin x}{x} \sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} \cos\left\{x \sin\left(y + \frac{2\varkappa}{n}\pi\right)\right\}. \tag{51}$$

Nun ist[6])

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} \cos\left\{x \sin\left(y + \frac{2\varkappa\pi}{n}\right)\right\} = (n-\sigma)\,\mathrm{J}_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2p}(x) \frac{\sin (n-\sigma)\frac{2p\pi}{n}}{\sin \frac{2p\pi}{n}} \cos\left(2p\alpha' + 2p\frac{\pi}{n}\right). \tag{56}$$

Damit wird

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{\sin x}{x} \sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} \cos\left\{x \sin\left(y + \frac{2\varkappa\pi}{n}\right)\right\} = \underbrace{\sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma (n-\sigma)\,\mathrm{J}_0\left(k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}\right) \frac{\sin\left(k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}\right)}{k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}}}_{(\mathrm{I})}$$

$$\underbrace{+ 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos\left(2p\alpha' + 2p\frac{\pi}{n}\right) \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \mathrm{J}_{2p}\left(k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}\right) \frac{\sin\left(k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}\right)}{k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}} \frac{\sin (n-\sigma)\, 2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}}}_{(\mathrm{II})}. \tag{57}$$

Im folgenden wird gezeigt, daß für $n > \frac{\pi d}{\lambda} + 2$ (II) gegen (I) praktisch zu vernachlässigen ist. Wir betrachten hierzu die innere, über σ erstreckte Summe in II, die wir S nennen.

Nach Formel (32) ist, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{x} \int_0^x \mathrm{J}_\nu(\xi)\, d\xi = F_\nu(x) \tag{59}$$

gesetzt wird:

$$S = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \mathrm{J}_{2p}\left(k d \sin \frac{\sigma\pi}{n}\right) \frac{\sin (n-\sigma)\, 2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(k d) \cos \frac{2q\sigma\pi}{n}, \tag{60}$$

oder, nach Vertauschung der Summenzeichen

---

6) Die Summierung derartiger Reihen ist zuerst von H. Stenzel, a. a. O., gegeben worden; wir lassen daher hier die Herleitung von (56) weg.

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(kd) \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma J_{2p}\left(kd \sin\frac{\sigma\pi}{n}\right) \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\pi}{n}. \tag{61}$$

Nun ist dies nach Einsetzung der bekannten Integraldarstellung für die Besselschen Funktionen erster Art von gerader Ordnung gleich

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(kd) \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2p\Theta \cos\left(kd \sin\frac{\sigma\pi}{n} \sin\Theta\right) d\Theta \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\sigma\pi}{n}, \tag{62}$$

oder nach Vertauschung von Summen und Integralzeichen gleich

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(kd) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2p\Theta \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \cos\left(kd \sin\frac{\sigma\pi}{n} \sin\Theta\right) d\Theta \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\sigma\pi}{n}, \tag{63}$$

oder nach Formel (31) entwickelt gleich

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(kd) \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2p\Theta\, J_{2r}(kd\sin\Theta)\, d\Theta \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos\frac{2q\sigma\pi}{n} \cos\frac{2r\sigma\pi}{n}, \tag{64}$$

oder unter Benutzung der Formel[7])

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\nu\varphi\, J_n(2x\cos\varphi)\, d\varphi = \cos\nu\frac{\pi}{2}\, J_{\frac{n+\nu}{2}}(x)\, J_{\frac{n-\nu}{2}}(x). \tag{65}$$

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(kd) \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r J_{r+p}\left(\frac{kd}{2}\right) J_{r-p}\left(\frac{kd}{2}\right) \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\sigma\pi}{n} \cos 2r\frac{\sigma\pi}{n}. \tag{66}$$

Nun ist aber, wenn $p \nmid 0 \pmod n$

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\pi}{n} \cos 2r\frac{\pi}{n} = -\sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{\sin 2p\frac{\sigma\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\sigma\pi}{n} \cos 2r\frac{\sigma\pi}{n} \tag{67}$$

$$= -\sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_\sigma}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \frac{1}{4}\left[\sin 2\frac{(p+q+r)\sigma\pi}{n} + \sin 2\frac{(p-q-r)\sigma\pi}{n} + \sin 2\frac{(p-q+r)\sigma\pi}{n} + \sin 2\frac{(p-q-r)\sigma\pi}{n}\right] = 0, \tag{68}$$

da unter der gemachten Voraussetzung für p

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{\sin 2(p\pm q\pm r)\sigma\pi}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} = 2\, \frac{\sin\frac{n-1}{2}\,\frac{2(p\pm q\pm r)\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}}\, \frac{\sin(p\pm q\pm r)\pi}{\sin\frac{(p\pm q\pm r)\pi}{n}} = 0 \tag{69}$$

ist, und zwar für jedes q und r.

Dagegen ist für $p \equiv 0 \pmod n$

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma \frac{\sin(n-\sigma)\,2p\frac{\pi}{n}}{\sin 2p\frac{\pi}{n}} \cos 2q\frac{\sigma\pi}{n} \cos 2r\frac{\sigma\pi}{n} = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma (n-\sigma) \cos 2q\frac{\sigma\pi}{n} \cos 2r\frac{\sigma\pi}{n} \tag{70}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_\sigma (n-\sigma)\, \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2(q+r)\sigma\pi}{n} + \cos\frac{2(q-r)\sigma\pi}{n}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(q+r)\pi}{\sin\frac{(q+r)\pi}{n}}\right)^2 + \left(\frac{\sin(q-r)\pi}{\sin\frac{(q-r)\pi}{n}}\right)^2\right]. \tag{71, 72}$$

Man übersieht nun unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $J_\nu(\nu-2) < 0{,}07$ leicht, daß praktisch für $n \geq \frac{\pi d}{\lambda} + 2$ (II) gegen (I) zu vernachlässigen ist, die Strahlungsleistung also unabhängig von der Kompensationsrichtung in der Kreisebene wird.

[7]) Siehe Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904. S. 63.

Für derart dicht besetzte Kreisgruppen ist also die Strahlungsleistung gegeben durch die Formel

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho n^2 A^2 \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q F_{2q}(kd) \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r J_r^2\left(\frac{kd}{2}\right) \frac{1}{2n^2}\left[\left(\frac{\sin[q+r]\pi}{\sin\frac{[q+r]\pi}{n}}\right)^2 + \left(\frac{\sin[q-r]\pi}{\sin\frac{[q-r]\pi}{n}}\right)^2\right]. \qquad (73)$$

Für $n > \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$ gilt,

$$\text{da} \quad \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r J_r^2\left(\frac{kd}{2}\right) \frac{1}{2n^2}\left[\left(\frac{\sin[q+r]\pi}{\sin\frac{[q+r]\pi}{n}}\right)^2 + \left(\frac{\sin[q-r]\pi}{\sin\frac{[q-r]\pi}{n}}\right)^2\right] \leq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r J_r^2\left(\frac{kd}{2}\right) = 1 \text{ ist,}$$

wieder unter Berücksichtigung, daß $J_\nu(\nu - 2) < 0{,}07$, die Näherungsformel

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho n^2 A^2 \sum_{q=0}^{\frac{n}{2}-1} \varepsilon_q \frac{1}{kd}\int_0^{kd} J_{2q}(\xi)\, d\xi \cdot J_q^2\left(\frac{kd}{2}\right). \qquad (74)$$

In Bild 2 ist der Strahlungsfaktor nach der Formel

$$\sum_{q=0}^{\frac{n}{2}-1} \varepsilon_q F_{2q}(kd) J_q^2\left(\frac{kd}{2}\right)$$

für $n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$ in Abhängigkeit von kd gezeichnet.

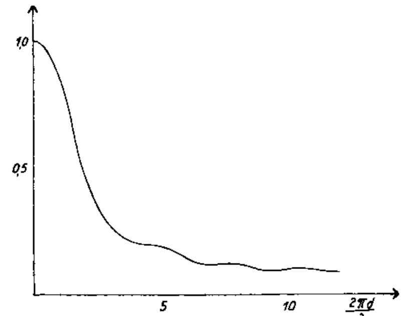

Abb. 2. Der Strahlungsfaktor der kompensierten Kreisgruppe.

5. Die Strahlungsleistung der kompensierten Kugel.

Zur Erzeugung eines in jede Raumrichtung künstlich drehbaren Richtstrahls (bei festbleibender Strahleranordnung) spielt in der Schalltechnik die kompensierte Kugelgruppe eine wichtige Rolle. Die Berechnung von Kugelgruppen mit endlich vielen Strahlern stößt auf analytische Schwierigkeiten. Die künstliche Richtcharakteristik der unendlich dicht mit Strahlern besetzten Kugeloberfläche ist bereits in dieser Zeitschrift vom Verfasser berechnet worden[8]). Bei den praktisch vorkommenden Kugelgruppen ist die Besetzung mit Strahlern nicht so dicht, daß eine merkliche Störung des Feldes eines Strahlers durch die anderen Strahler eintritt. Es ist daher in der erwähnten Arbeit auch die unendlich dicht mit Strahlern besetzte Kugel so berechnet worden, als ob sich ihre Strahler in ihrer Strahlung gegenseitig nicht hindern. Obwohl sich eine unendlich dicht besetzte Kugel unter dieser Voraussetzung physikalisch nicht realisieren läßt, wird eine hinreichend dicht mit endlich vielen Strahlern besetzte Kugel praktisch dieselbe Charakteristik haben, wenn eine merkliche Störung des Feldes eines Strahlers durch die anderen Strahler nicht eintritt. Im folgenden soll daher die Strahlungsleistung der kompensierten Kugel unter denselben Voraussetzungen berechnet werden. Hier läßt sich die Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik leicht ausführen.

Der Richtfaktor der kompensierten Kugel ist[8])

$$\frac{A_{ges}}{\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu} = \frac{\sin\left(kd \sin\frac{\gamma}{2}\right)}{kd \sin\frac{\gamma}{2}}, \qquad (75)$$

wenn d der Kugeldurchmesser und γ die Abweichung von der Kompensationsrichtung ist.

Es ist daher nach Formel (14)

[8]) Siehe F. A. Fischer, ENT **9**, 1930, S. 369–373.

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho n^2 A^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin\left(k d \sin\frac{\gamma}{2}\right)}{k d \sin\frac{\gamma}{2}} \right]^2 \sin\gamma \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\gamma. \qquad (76)$$

Eine elementare Umformung ergibt

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho n^2 A^2 \frac{2}{k^2 d^2} \int_0^{kd} \frac{\sin^2 x}{x} \, d x, \qquad (79)$$

also schließlich

$$L = \frac{1}{8\pi} k^2 a \varrho n^2 A^2 \frac{1}{k^2 d^2} \left[C + \lg(2 k d) - \mathrm{Ci}(2 k d) \right], \qquad (80)$$

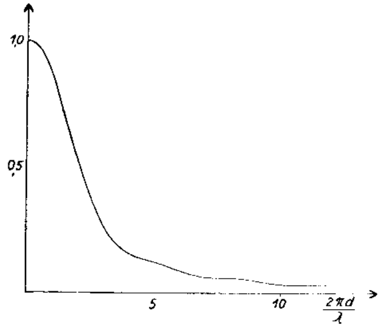

Abb. 3. Der Strahlungsfaktor der kompensierten Kugel.

wenn mit C die Eulersche Konstante bezeichnet wird und der Integralkosinus $\mathrm{Ci}(x)$ definiert ist durch $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} \mathrm{d} u$.

Die Funktion $\mathrm{Ci}(x)$ ist tabuliert in E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1923, S. 21.

Der Strahlungsfaktor $\frac{1}{k^2 d^2} [C + \lg(2 kd) - \mathrm{Ci}(2 kd)]$ ist in Abb. 3 in Abhängigkeit von kd graphisch dargestellt.

6. Zusammenfassung.

Es wird die Strahlungsleistung der Kreisgruppe mit und ohne künstliche Phasenverschiebung und der kompensierten Kugelgruppe berechnet. Da bei der Berechnung der Kreisgruppen die direkte Integration über das Quadrat der Richtcharakteristik auf Schwierigkeiten stößt, wird hierfür eine von Rayleigh stammende allgemeine Formel benutzt, nach der die Strahlungsleistung ausgerechnet werden kann, ohne daß die Richtcharakteristik berechnet zu werden braucht. Diese Formel führt zu analytisch und numerisch bequem zu handhabenden Ausdrücken.

(Eingegangen am 3. September 1931.)