Über die Peilschärfe der künstlichen Charakteristik einer beliebigen Anordnung von Strahlern im Raume.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Electroacustic G. m. b. H., Kiel.)

Von **F. A. Fischer**, Kiel.

1. Einleitung.

Unter der künstlichen Charakteristik einer Gruppe von Einzelstrahlern mit Bezug auf eine bestimmte Richtung versteht man diejenige Kennlinie, die entsteht, wenn in die Zuleitungen zu den Empfängern (bzw. Sendern) Verzögerungseinrichtungen eingeschaltet sind, so bemessen, daß für diese bestimmte Richtung Gleichphasigkeit (bei Impulsen Gleichzeitigkeit) aller Strahler vorhanden ist. Die künstlichen Charakteristiken der wichtigsten Anordnungen von in einer Ebene liegenden Strahlern (die Gerade- und die Kreisgruppe) hat Stenzel[1]) behandelt. Sie sind beide nach Potenzen der Abweichung ε der Strahlrichtung α von der Kompensationsrichtung β entwickelt von der Form

$$R(\varepsilon) = 1 - a_2 \varepsilon^2 + \ldots \qquad (1)$$

Der Beiwert a_2 ist das Maß für die Peilschärfe.

Wie im folgenden gezeigt werden wird, steht die Peilschärfe einer künstlichen Charakteristik in engem Zusammenhang mit dem Trägheitsmoment der Anordnung. Zur Bildung dieses Begriffes denke man sich nach Stenzel jeden Strahler durch einen Punkt mit der Masse $\frac{1}{n}$ ersetzt, wenn n die Anzahl der Strahler ist. Bezeichnet man die Wellenlänge mit λ, so wird, wie weiter unten bewiesen werden soll,

$$a_2 = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} T(\alpha), \qquad (2)$$

worin $T(\alpha)$ das Trägheitsmoment der Gruppe um die Strahlrichtung (α) als Achse ist.

Die künstliche Charakteristik einer willkürlichen Anordnung von in einer Ebene angeordneten Einzelstrahlern ist also in dieser Ebene dargestellt durch

$$R = 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} T(\alpha)\, \varepsilon^2 + \ldots \qquad (3)$$

[1]) H. Stenzel „Über die Richtwirkung von in einer Ebene angeordneten Strahlern". ENT **6**, S. 165, 1929.

Diese Formel hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der von Stenzel[2]) für die Peilschärfe der natürlichen Charakteristik von willkürlich in einer Ebene verteilten Strahlern abgeleiteten Formel, in der auch gewisse Trägheitsmomente vorkommen. Es soll später noch auf den Zusammenhang dieser Formeln hingewiesen werden. Auch hier ist es nicht notwendig, daß die Maximalamplituden der einzelnen Strahler denselben Wert haben. Man braucht nur den Strahlern ihren Maximalamplituden entsprechende Massen zuzuteilen. Die einzelnen Strahler sollen ungerichtet sein.

Von räumlichen Anordnungen ist auf ihre künstliche Charakteristik hin die Kugelgruppe untersucht worden[3]). Da aber neuerdings auch von der Kugel abweichende Anordnungen von Strahlern insbesondere für die Schalltechnik Bedeutung erlangt haben, so soll im folgenden die der Formel (3) entsprechende Formel für eine beliebige Raumgruppe abgeleitet werden.

2. Die Peilschärfe der künstlichen Charakteristik einer willkürlichen Raumgruppe.

O (Abb. 1) sei der Punkt, auf den die Phasen bezogen werden. Die Strahlrichtung wird durch den Einheitsvektor $\mathfrak{r}$, die Kompensationsrichtung durch $\mathfrak{r}'$ dargestellt. Beide Richtungen bilden den Winkel ε miteinander. Die Einheitskugel schneide die Strahlrichtung im Punkte P, die Kompensationsrichtung im Punkte Q. Der Großkreisbogen PQ auf der Einheitskugel ist also gleich ε.

Die Entfernung des νten Strahlers von O sei r_ν. Die Verbindungslinie dieses Strahlers mit O schneide die Einheitskugel in E_ν und bilde mit $\mathfrak{r}$ den Winkel α_ν, mit $\mathfrak{r}'$ den Winkel α_ν'. In Abb. 1 sind die entsprechenden Großkreisbogen auf der Einheitskugel gezeichnet.

Die von der Strahlung herrührende Phasen-

[2]) a. a. O., S. 167, Formel (3).

[3]) F. A. Fischer, „Über die künstliche Charakteristik der Kugelgruppe". ENT **7**, S. 369, 1930.

verschiebung des betrachteten Strahlers ist dann gegeben durch

$$\varphi_\nu = \frac{2\pi r_\nu}{\lambda} \cos \alpha_\nu \tag{4}$$

und die von der Kompensation erzeugte durch

$$\varphi_\nu' = \frac{2\pi r_\nu}{\lambda} \cos \alpha_\nu' \cdot \tag{5}$$

Die gesamte Phasendifferenz gegen den Bezugspunkt ist daher

$$\begin{aligned}\psi_\nu = \varphi_\nu - \varphi_\nu' &= \frac{2\pi r_\nu}{\lambda} (\cos \alpha_\nu - \cos \alpha_\nu') \\ &= -\frac{2\pi r_\nu}{\lambda}\, 2 \sin \frac{\alpha_\nu + \alpha_\nu'}{2} \sin \frac{\alpha_\nu - \alpha_\nu'}{2}.\end{aligned} \tag{6}$$

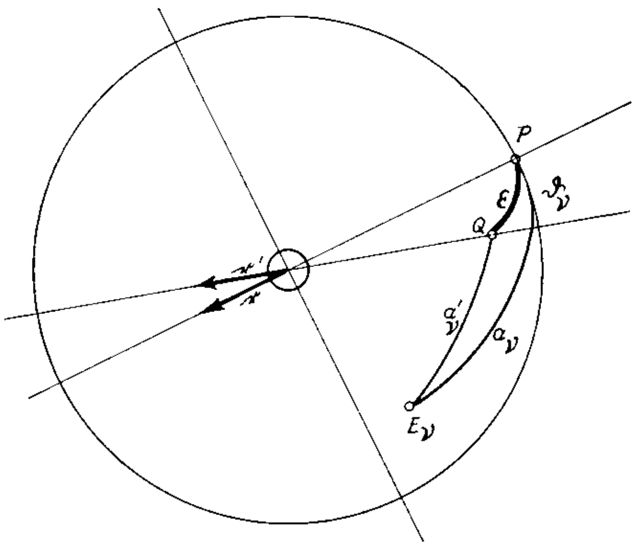

Abb. 1. Strahlungsrichtung, Kompensationsrichtung und Bild eines Einzelstrahlers auf der Einheitskugel.

Für hinreichend kleines ε kann man hierin $\frac{\alpha_\nu + \alpha_\nu'}{2}$ durch α_ν und $2 \sin \frac{\alpha_\nu - \alpha_\nu'}{2}$ durch $\alpha_\nu - \alpha_\nu'$ ersetzen. Es ist also

$$\psi_\nu = -\frac{2\pi r_\nu}{\lambda} \cdot \sin \alpha_\nu \cdot (\alpha_\nu - \alpha_\nu'). \tag{7}$$

$\alpha_\nu - \alpha_\nu'$ ist, wie aus dem Dreieck QPE_ν ohne weiteres abzulesen, in erster Annäherung gleich $\varepsilon \cdot \cos \vartheta_\nu$, wenn ϑ_ν der Winkel an der Ecke P des sphärischen Dreiecks QPE_ν ist. Es ist also

$$\psi = -\frac{2\pi r_\nu}{\lambda} \sin \alpha_\nu \cos \vartheta_\nu \cdot \varepsilon. \tag{8}$$

ϑ_ν ist zugleich der Winkel, den die beiden durch $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}$, E_ν definierten Ebenen miteinander bilden. Die Größe $\sin \alpha_\nu \cos \vartheta_\nu$ ist daher, wie aus Abb. 2 abgelesen werden kann, der Abstand p_ν der Projektion E_ν' von E_ν auf die Peilebene ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$) von der Strahlachse $\mathfrak{r}$.

Also ist schließlich

$$\psi_\nu = -\frac{2\pi r_\nu}{\lambda} p_\nu \varepsilon. \tag{9}$$

Die Richtcharakteristik ist ganz allgemein gegeben durch die Formel

$$R^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \cos \psi_\nu\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \sin \psi_\nu\right)^2. \tag{10}$$

Für kleine ε, also kleine ψ_ν, ist in erster Annäherung

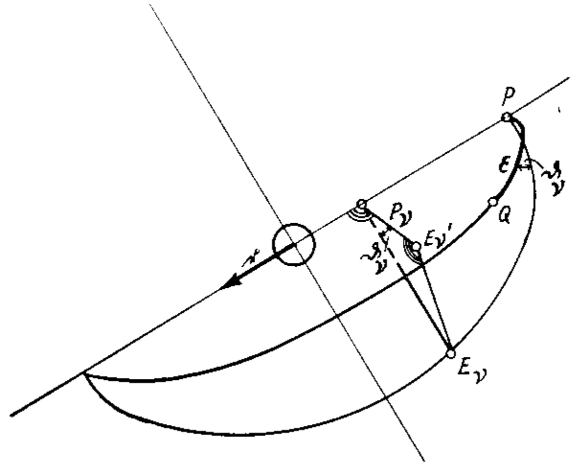

Abb. 2. Projizierung eines Strahlerbildes auf die durch Strahlungsrichtung und Kompensationsrichtung gebildete Ebene.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \cos \psi_\nu &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\psi_\nu^2}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (r_\nu p_\nu)^2\end{aligned} \tag{11}$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \sin \psi_\nu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu = -\frac{1}{n}\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu p_\nu. \tag{12}$$

Läßt man den Bezugspunkt O mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfallen, so wird

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu p_\nu = 0, \tag{13}$$

$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} (r_\nu p_\nu)^2$ ist aber das Trägheitsmoment des Systems der Projektionen der Empfänger auf die Ebene ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$) um die Achse $\mathfrak{r}$.

Setzt man also

$$\sum_{\nu=1}^{n} (r_\nu\, p_\nu)^2 = T(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \tag{14}$$

so wird schließlich

$$\boxed{R = 1 - \frac{2\,\pi^2}{\lambda^2}\, T(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\, \varepsilon^2 + \ldots} \tag{15}$$

Dies ist die allgemeine Formel für die künstliche Charakteristik einer Raumgruppe.

Die Peilschärfe ist also proportional zu $\frac{T(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')}{\lambda^2}$.

In Worten ergibt sich der Satz:

Die Peilschärfe einer kompensierten Raumgruppe ist dem Trägheitsmoment des Systems der Projektionen der Strahler auf die durch die Strahlungsrichtung und die Kompensationsrichtung gebildete Ebene, um die Strahlungsrichtung als durch den Schwerpunkt gehende Achse, direkt und dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional.

Von einer bestimmten Strahlungsrichtung ausgehend ist also im allgemeinen die Peilschärfe noch von der Orientierung der aus Kompensationsrichtung und Strahlrichtung gebildeten Ebene abhängig.

3. Zusammenhang mit den Formeln für ebene Strahlergruppen.

Liegen die Strahler alle in einer Ebene und betrachtet man nur Abweichungen der Kompensationsrichtung von der Strahlungsrichtung in der Strahlerebene, so fallen die Strahler mit ihren Projektionen auf die durch die Strahlungsrichtung und die Kompensationsrichtung gebildete Ebene zusammen, da diese Ebene die Strahlerebene ist. Es geht dann Formel (15) in die Formel (3) über.

Wird dagegen eine ebene Anordnung von Strahlern räumlich kompensiert, so gibt es eine Kompensationsrichtung, für die die künstliche Charakteristik mit der natürlichen übereinstimmt, nämlich die Richtung senkrecht zur Strahlerebene. Für diesen Fall geht die Formel (15) in die in der Einleitung erwähnte Formel von Stenzel für die natürliche Charakteristik einer ebenen Anordnung über. Damit ist zugleich der Zusammenhang der Formel (3) mit der Stenzelschen gezeigt. Beide sind Spezialfälle der Formel (15).

Zusammenfassung.

Es wird die Peilschärfe der künstlichen Charakteristik einer beliebigen Anordnung von Strahlern im Raume, die selbst ungerichtet sind, in ihrer Abhängigkeit von der Kompensationsrichtung und der geometrischen Konfiguration der Strahler untersucht. Die künstliche Richtcharakteristik wird nach Potenzen der Abweichung der Kompensationsrichtung von der Strahlrichtung entwickelt. Der Koeffizient des quadratischen Gliedes ist das Maß für die Peilschärfe. Stellt man jeden Strahler durch einen Massenpunkt dar, dessen Masse seiner Intensität proportional ist, so ergibt sich, daß die Peilschärfe dem Trägheitsmoment des Systems der Projektionen der Strahler auf die durch die Strahlungsrichtung und die Kompensationsrichtung gebildete Ebene um die durch den Schwerpunkt gehende Strahlungsrichtung als Achse direkt und dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional ist.

Bei einer ebenen Strahleranordnung fallen für alle Peilungen in der Strahlerebene die Strahler mit ihren Projektionen auf die durch Strahlungsrichtung und Kompensationsrichtung gebildete Ebene zusammen.

Wird eine ebene Strahleranordnung senkrecht zur Strahlerebene kompensiert, so stimmt die künstliche Charakteristik mit der natürlichen überein.

(Eingegangen am 21. Oktober 1930.)

UMSCHAU

Weltfernsprechstatistik.

Stand vom 1. Januar 1930.

Die Zahlen für die Weltfernsprechstatistik sind, wie in früheren Jahren so auch diesmal, von W. H. Gunston aus den amtlichen Zusammenstellungen der Staaten und Gesellschaften ermittelt und im Telegraph and Telephone Journal No. 189 veröffentlicht worden. Dieser sehr interessanten Zusammenstellung seien folgende Einzelheiten entnommen:

Für die einzelnen Erdteile ergeben sich folgende Teilnehmerzahlen:

	am 31. 12. 28	am 31. 12. 29
Europa	9 185 000	9 958 000
Asien	1 205 000	1 265 000
Afrika	205 000	224 000
Nordamerika	20 890 000	21 706 000
Südamerika	502 000	542 000
Australien	672 000	706 000
	32 659 000	34 401 000