Über die künstliche Charakteristik der Kugelgruppe.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Electroacustic G. m. b. H., Kiel.)

Von **F. A. Fischer**, Kiel.

1. Einleitung.

Im folgenden wird die Richtwirkung eines Systems von selbst ungerichteten Strahlern untersucht, die auf einer Kugelfläche angeordnet sind. Die Strahler werden dabei als punktförmig angenommen. Zu Gruppen zusammengefaßte Strahler spielen in der Technik, insbesondere in der Schalltechnik, eine wichtige Rolle, da sie es ermöglichen, gerichtet zu senden oder zu empfangen und dabei die Hauptstrahlrichtung beliebig zu verändern, ohne daß dabei die Strahleranordnung im Raume verändert wird. Man erreicht dies z. B. durch Einschaltung von Drosselketten in die Zuleitungen zu den Empfängern. Diese erzeugen bei geeigneter Dimensionierung ganz bestimmte Verzögerungen. Es entsteht dann aus der natürlichen Charakteristik eine künstliche. Diejenige künstliche Charakteristik, die entsteht, wenn die Verzögerungen so bemessen werden, daß für eine bestimmte Richtung Gleichphasigkeit (bei Impulsen Gleichzeitigkeit) aller Strahler vorhanden ist, wird in der Literatur[1]) als „die künstliche Charakteristik" schlechtweg bezeichnet.

Bei vielen praktischen Anwendungen dieses Kompensationsprinzips besteht der Wunsch nach einer von der Kompensationsrichtung unabhängigen Peilschärfe der künstlichen Charakteristik. Für Peilungen in der Ebene hat die Anordnung der Strahler auf einer Kreislinie die gewünschte Eigenschaft. Mit dieser sogenannten Kreisgruppe hat sich H. Stenzel in seiner Arbeit „Über die Richtwirkung von in einer Ebene angeordneten Strahlern" (ENT **6**, S. 165, 1929) eingehend beschäftigt. In dieser Abhandlung wird auch bereits erwähnt, daß das Problem für den Raum von der Kugelgruppe gelöst wird. Eine Verteilung von Strahlern auf der Kugel hat eine künstliche Charakteristik, deren Peilschärfe für alle Richtungen im Raum von der Kompensationsrichtung unabhängig ist. Da diese Anordnung für die Technik erhöhtes Interesse gewinnt, soll im folgenden ihre künstliche Charakteristik im Anschluß an die Stenzelschen Rechnungen über die Kreisgruppe näher betrachtet werden. Auf die schalttechnische Seite des Problems soll hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur erwähnt, daß Schaltungen und Mechanismen gefunden sind, die es ohne Schwierigkeiten gestatten, sowohl bei der Kreis- als auch bei der Kugelgruppe die erforderlichen Zeitverzögerungen, in Abhängigkeit von der Einfallrichtung des Schalles, herzustellen.

H. Stenzel hat in der oben erwähnten Arbeit gezeigt, daß die künstliche Charakteristik der Kreisgruppe vom Durchmesser d für die Wellenlänge λ in ihrer Ebene durch die Formel:

$$R_\alpha = J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{1}$$

gegeben ist, wenn die Anzahl n der Empfänger der Ungleichung

$$n > \frac{2\pi d}{\lambda} + 2 \tag{2}$$

genügt. J_0 ist hierbei die Besselsche Funktion nullter Ordnung. α ist die Richtung nach dem Aufpunkt und β die Richtung, auf die die Empfänger durch Einschalten geeigneter Verzögerungen kompensiert sind.

Die Formel für die künstliche Charakteristik des nach der Höhe kompensierten Kreises ist bei derselben Bedingung für die Empfängerzahl:

$$R_\gamma = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda}|\cos\gamma - \cos\delta|\right), \tag{3}$$

wenn γ die Richtung nach dem Aufpunkt und δ die Kompensationsrichtung ist.

Soll mit einem nach der Höhe γ kompensierten Kreis auch noch das Azimut α festgestellt werden, so geschieht dies mit einer Schärfe, die gegeben ist durch die Formel:

$$R_{\alpha,\gamma} = J_0\left(\frac{2\pi d\cos\gamma}{\lambda}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{4}$$

[1]) Siehe H. Stenzel, „Über die Richtwirkung von Schallstrahlern". ENT **4**, S. 239, 1927.

2. Die künstliche Charakteristik der unendlich dicht mit Strahlern besetzten Kugelfläche.

Man könnte zunächst daran denken, wie bei der Berechnung der Kreisgruppe von regelmäßigen Empfängeranordnungen auszugehen und dann zu untersuchen, von welcher Empfängerzahl ab die Charakteristik unabhängig von der Anzahl der Empfänger wird. Dies wäre aber auf der Kugel allenfalls nur für im Verhältnis zur Wellenlänge kleine Durchmesser möglich, da es nur fünf regelmäßige Vielflache

(Tetraeder mit 4 Ecken,
Oktaeder mit 6 Ecken,
Hexaeder mit 8 Ecken,
Ikosaeder mit 12 Ecken und
Dodokaeder mit 20 Ecken)

gibt, die Zahl der Strahler also bei regelmäßiger Verteilung auf 20 beschränkt ist. Es bleibt also nichts übrig, als zunächst die künstliche Charakteristik der unendlich dicht mit Strahlern besetzten Kugeloberfläche zu berechnen und dann zu überlegen, welche Anordnungen dieser idealen genügend nahe kommen.

Bei der unendlich dicht besetzten Kugelfläche kann man offenbar, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, den Aufpunkt in die Azimutalebene legen. Zerlegt man die Kugel in m Zonen mit gleichem Zentriwinkel $\frac{\pi}{m}$, so ist die Richtcharakteristik der Grenzwert der Reihe

$$\frac{1}{4\pi r^2}\sum_{\nu=1}^{m} J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\nu\pi}{m}\right)\cdot df, \qquad (5)$$

wobei

$$df = 2\pi r h \quad \text{und} \quad \frac{h}{r\frac{\pi}{m}} = \sin\frac{\nu\pi}{m}.$$

Es ist also, wenn wir abkürzend

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \xi$$

setzen:

$$R = \lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m} J_0\left(\xi\sin\frac{\nu\pi}{m}\right)\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}. \qquad (6)$$

Also ist schließlich

$$R = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\omega\cdot J_0(\xi\sin\omega)\,d\omega$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\omega\cdot J_0(\xi\sin\omega)\,d\omega \qquad (7)$$

oder[2])

$$\boxed{R = \frac{\sin\xi}{\xi}} = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \ldots{}^{3)}. \qquad (8)$$

Bezeichnet man die Abweichung $\alpha-\beta$ von der Kompensationsrichtung mit ε, so wird für kleine ε

$$\xi = \frac{2\pi d}{\lambda}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\varepsilon.$$

Die natürliche Charakteristik der geraden Linie ist nach Stenzel

$$R = \frac{\sin\zeta}{\zeta} = 1 - \frac{\zeta^2}{6} + \ldots \qquad (9)$$

mit

$$\zeta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\varepsilon$$

oder für kleine ε angenähert

$$\zeta = \frac{\pi d}{\lambda}\varepsilon.$$

Für kleine Abweichungen ε von der Kompensationsrichtung ist also $\xi = \zeta$. Definiert man den negativen Beiwert von ξ^2 als die Peilschärfe, so liefert der Vergleich der beiden Formeln für die Richtcharakteristiken folgendes Resultat:

Die Peilschärfe einer kompensierten Kugelfläche ist gleich der natürlichen Peilschärfe ihres Durchmessers.

Die Peilschärfe ist dem Quadrat des Verhältnisses d/λ proportional.

Der Vergleich mit der Charakteristik der Kreislinie liefert in ähnlicher Weise den Satz:

Die Peilschärfe der Kugelfläche ist $^2/_3$ der Peilschärfe ihres Großkreises.

In Abb. 1 ist die Richtcharakteristik der Kugel für $\frac{d}{\lambda} = 1{,}5$ gezeichnet. Die gestrichelte Kurve stellt zum Vergleich die azimutale Peilschärfe des hinreichend besetzten Kreises $\frac{d}{\lambda} = 1{,}5$ dar.

Bewegt sich $\alpha-\beta$ zwischen 0 und 180°, so bewegt sich ξ zwischen 0 und $\frac{2\pi d}{\lambda}$. Soll daher

---

[2]) Siehe z. B. Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen, S. 32.

[3]) Diese Formel für die künstliche Charakteristik der Kugel hat bereits früher unabhängig von mir mein Kollege, Herr Dr. John, auf ähnlichem Wege gefunden.

die Charakteristik kein Nebenmaximum haben, so muß

$$\frac{2\pi d}{\lambda} < \pi$$

oder

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{1}{2}$$

sein.

Die künstliche Charakteristik der Kugelfläche besitzt kein Nebenmaximum, wenn $d < \frac{\lambda}{2}$ ist. Auch hier muß man, wenn man größere Peilschärfe erzielen will, Nebenmaxima in Kauf nehmen.

3. Die künstliche Charakteristik der mit Einzelsendern besetzten Kugelfläche.

Bereits im vorigen Abschnitt ist darauf hingewiesen worden, daß man mit regulären Anordnungen auf der Kugel nicht über die Empfängerzahl 20 hinauskommt. Für die Praxis ist es naheliegend, eine Kugelgruppe aus m Breitenkreisen von gleicher Breitendifferenz aufzubauen. Im folgenden sollen die mit einer solchen Anordnung erzielbaren Peilschärfen berechnet werden. Die Breitenkreise sollen so dicht besetzt sein, daß ihre Charakteristik oder wenigstens deren Hauptteil durch die Formel (1) darstellbar ist und außerdem soll die Empfängerzahl auf den einzelnen Breitenkreisen ihrem Durchmesser proportional sein. Dann ist der Azimutalschnitt durch die Richtcharakteristik dieser Gruppe in der Äquatorebene gegeben durch

$$R_m = \frac{1}{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \sin\frac{\nu\pi}{m}} \cdot \sum_{\nu=0}^{m-1} J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\nu\pi}{m-1}\right)\sin\frac{\nu\pi}{m-1}. \quad (10)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von

$$\xi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

so kommt

$$R_m = 1 - \frac{\xi^2}{4}\,\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1}\sin^3\left(\frac{\nu\pi}{m}\right)}{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1}\sin\frac{\nu\pi}{m}} + \cdots$$

oder

$$R_m = 1 - \frac{\xi^2}{16}(3 + b_m) + \cdots$$

mit

$$b_m = \frac{\sin\frac{m}{m-1}\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2(m-1)}}{\sin\frac{3\pi}{2(m-1)}\sin\frac{m}{m-1}\frac{\pi}{2}} = \frac{-1+4\sin^2\frac{\pi}{2(m-1)}}{3-4\sin^2\frac{\pi}{2(m-1)}}.$$

Der negative Beiwert von ξ^2 ist das Maß für die Peilschärfe.

Für $m = \infty$ ist $b = -\frac{1}{3}$ und es ergibt sich

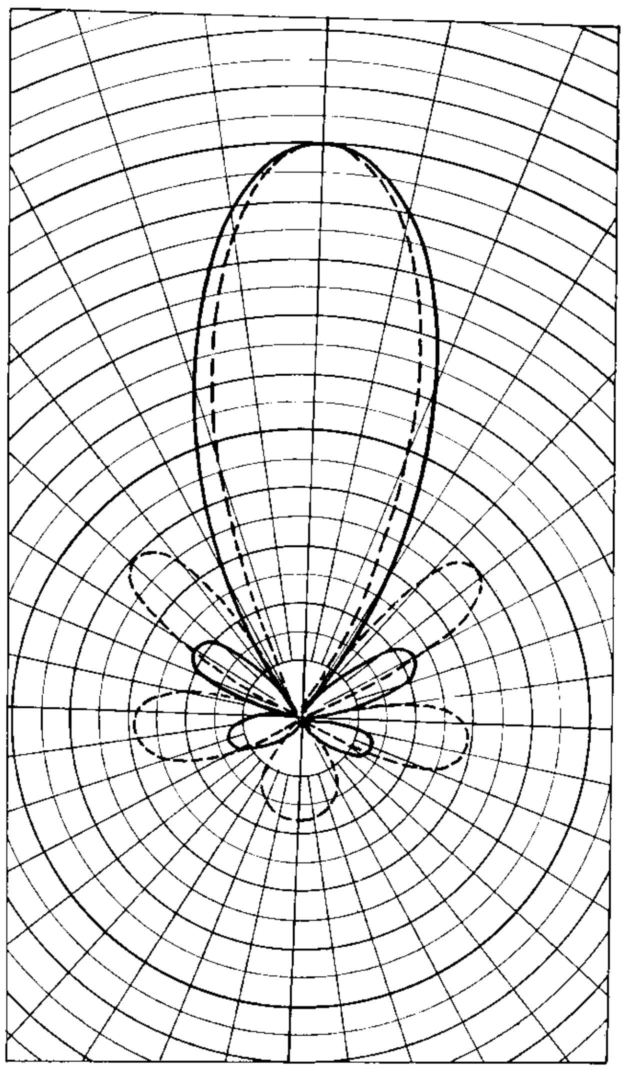

Abb. 1. Künstliche Richtcharakteristik der Kugelgruppe (ausgezogen) und der Kreisgruppe (gestrichelt) für $\frac{d}{\lambda} = 1{,}5$.

die Peilschärfe der stetig mit Strahlern belegten Kugel.

In Prozenten der kontinuierlich mit Strahlern belegten Kugelfläche ausgedrückt, ist daher die azimutale Peilschärfe der beschriebenen Anordnung in der Äquatorebene gegeben durch

$$a_m = 100 \cdot \frac{3}{8}(3 + b_m)$$

oder

$$\boxed{a_m = 100 \cdot \frac{3 - 3\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)}}{3 - 4\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)}}.} \qquad (11)$$

Bezeichnet γ den Höhenwinkel und δ den Kompensationswinkel nach der Höhe, so ist der Vertikalschnitt durch die Richtcharakteristik der nach der Höhe kompensierten Gruppe gemäß Formel (3) gegeben durch

$$H_m = \frac{1}{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \sin \frac{\nu\pi}{m-1}} \cdot \left| \sum_{\nu=0}^{m-1} J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} [\cos\gamma - \cos\delta] \sin \frac{\nu\pi}{m-1} \right) \cdot e^{i \frac{\pi d}{\lambda} \cos \frac{\nu\pi}{m-1} [\sin\gamma - \sin\delta]} \sin \frac{\nu\pi}{m-1} \right|, \qquad (12)$$

oder nach Potenzen von

$$\frac{\pi d}{\lambda} \varepsilon = \frac{\pi d}{\lambda} (\gamma - \delta)$$

entwickelt:

$$H_m = 1 - \left(\frac{\pi d}{\lambda} \varepsilon \right)^2 \left[\frac{1}{16} \sin^2\delta\,(3 + b_m) + \frac{1}{8} \cos^2\delta\,(1 - b_m) \right] + \ldots$$

Die Peilschärfe nach der Höhe ist danach in Prozenten der Peilschärfe der kontinuierlichen Kugel ausgedrückt gegeben durch

$$h_m = a_m \sin^2\delta + 100 \frac{3}{4} (1 - b_m) \cos^2\delta \qquad (13)$$

oder

$$\boxed{h_m = a_m \sin^2\delta + 100 \frac{3 - 6\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)}}{3 - 4\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)}} \cos^2\delta.} \qquad (14)$$

Die Peilschärfe nach der Höhe ist also für endliches m eine Funktion der Höhenkompensation. Insbesondere ist

$$(h_m)_{\delta = 90^\circ} = a_m,$$
$$(h_m)_{\delta < 90^\circ} \leqq a_m.$$

Soll nun die Peilschärfe der beschriebenen Gruppe überall beispielsweise mindestens 90 vH der Peilschärfe der kontinuierlichen Kugelfläche sein, so muß

$$\frac{3 - 6\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)}}{3 - 4\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)}} > 0{,}9,$$

oder

$$\sin^2 \frac{\pi}{2(m-1)} < \frac{1}{8}, \quad \text{d. h. } m > 5{,}36,$$

also

$$m \geqq 6$$

sein.

Für $m = 6$ wird
$$a_m = 104 \text{ vH} \quad \text{und} \quad (h_m)_{\delta=0} = 93 \text{ vH}.$$

Zusammenfassung.

Es wird die künstliche Charakteristik einer kontinuierlich mit Strahlern belegten Kugelfläche berechnet. Aus der Formel folgt, daß die Peilschärfe einer kompensierten Kugelfläche gleich der natürlichen Peilschärfe ihres Durchmessers, also dem Quadrat des Verhältnisses Durchmesser zu Wellenlänge proportional, ist. Soll die Kugel keine Nebenmaxima haben, so muß ihr Durchmesser kleiner als die halbe Wellenlänge sein.

Die Peilschärfe einer Kugelgruppe aus Einzelstrahlern, die auf m Breitenkreisen von gleicher Breitendifferenz liegen, wird berechnet und ihre Abhängigkeit von m untersucht. Bereits für $m = 6$ hat diese Anordnung mehr als 90 vH der Peilschärfe der kontinuierlichen Kugelfläche.

(Eingegangen am 8. Juni 1930.)

H. Heinzelmann: **Die elektrischen Kabel.** 133 S. mit 71 Abb. Verlag W. de Gruyter & Co., Berlin 1930. Sammlung Göschen Nr. 1019.

In diesem Büchlein gibt der Verfasser eine gedrängte Übersicht über den heutigen Stand der Kabeltechnik. Zunächst wird ein Überblick über den allgemeinen Aufbau der Kabel gegeben, dem sich ein Abschnitt über die notwendigen Rohstoffe anschließt. Nachdem die Herstellungsverfahren geschildert sind, wird auf die verschiedenen Kabelarten eingegangen. Unter ihnen nehmen die Starkstromkabel einen breiten Raum (53 Seiten) ein. Ihre Eigenschaften und ihr Verhalten im Betrieb werden erörtert. Schließlich werden auch verschiedene Sonderausführungen besprochen. Mit einem Abschnitt über Schwachstromkabel schließt der Verfasser. In Kürze werden Signalkabel, Fernkabel und Telegraphenkabel beschrieben. Das Büchlein ist eine gute Einführung in das Gebiet und dürfte vielen Studierenden und solchen, die sich rasch unterrichten wollen, willkommen sein. *M.*

Verantwortlich für die Schriftleitung: Dr. F. Moench, Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 161.
Gedruckt bei Ernst Siegfried Mittler und Sohn, Buchdruckerei G. m. b. H., Berlin SW 68, Kochstraße 68—71.