

ELEKTRISCHE NACHRICHTEN-TECHNIK

Unter Mitwirkung von: G. Graf v. Arco, H. Barkhausen, F. Breisig, K. Dohmen, A. Elfes, E. Falkenthal, E. Feyerabend, A. Franke, W. Hahnemann, J. Harbich, R. Hartz, H. Hecht, C. Hersen, K. Höpfner, A. Korn, A. Kruckow, A. Kunert, F. Lüschen, W. Ohnesorge, M. Reich, O. Reichenheim, H. Rukop, O. Scheller, W. Stäckel, H. C. Steidle, H. Thurn, K. Winnig, G. Zapf und J. Zenneck / Herausgegeben von K. W. Wagner / Schriftleiter: F. Moench und H. Salinger / Verlag der Weidmannschen Buchhandlung, Berlin SW68

H E F T 5 *

M A I 1 9 2 9

* B A N D 6

Über die Richtcharakteristik von in einer Ebene angeordneten Strahlern.

(Mitteilung aus dem Forschungsinstitut der AEG)

Von H. Stenzel.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	165
I. Die Peilschärfe von willkürlich in einer Ebene verteilten Strahlern	166
II. Die Richtcharakteristik von einfachen kontinuierlichen Strahlern	167
III. Die Richtcharakteristik von regelmäßig angeordneten punktförmigen Strahlern:	
a) Die gerade Gruppe	169
b) Die Kreisgruppe	170
c) Kombination von Systemen	173
IV. Die Richtcharakteristik bei künstlicher Phasenverschiebung:	
a) Die gerade Gruppe	174
b) Die Kreisgruppe	175
Zusammenfassung	181

Einleitung.

Im folgenden wird die Richtwirkung von Strahlern untersucht, die eine bestimmte Anordnung in einer Ebene besitzen. Dabei wird der Strahlungsvorgang des einzelnen Strahlers als rein sinusförmig angenommen. Jeder Strahler selbst ist zunächst punktförmig gedacht, und die Aufgabe besteht darin, die Richtwirkung zu untersuchen, die durch Interferenz der einzelnen Strahler im Aufpunkt hervorgerufen wird. Der Aufpunkt ist so weit entfernt gedacht, daß alle Verbindungslinien von ihm zu den einzelnen Strahlern als parallel angesehen werden können. Die Frage, wie weit sich die Strahleranordnungen in der Akustik, Optik, Elektrizität (Funktechnik) realisieren lassen, soll nicht erörtert werden.

Höchstens werden gelegentlich einige Beispiele zur Erläuterung herangezogen.

An Stelle eines Strahlersystems, dessen resultierende Amplitude im Aufpunkt gemessen wird, können wir uns die Richtcharakteristik auch durch ein entsprechendes Empfangssystem hervorgerufen denken, indem ein im Aufpunkt angebrachter Strahler sinusförmig strahlt. Die Aufgabe, gerichtet zu senden, ist also prinzipiell völlig gleichwertig mit der, gerichtet zu empfangen.

In der Praxis (z. B. der Funktechnik) werden sich oft ungerichtete (punktförmige) Einzelstrahler nicht verwirklichen lassen, sondern der einzelne Strahler wird an sich schon eine bestimmte Richtwirkung haben. Doch wird dadurch die gesamte resultierende Charakteristik offenbar nur insoweit geändert, als die Richtcharakteristik des einzelnen Strahlers als Faktor hinzukommt, wenn man voraussetzt, daß jeder Einzelstrahler für sich dieselbe Richtcharakteristik besitzt.

Wir charakterisieren also den Strahlungsvorgang eines einzelnen Strahlers im Aufpunkt A durch:

$$a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r}{\lambda} \right),$$

wo ν die Frequenz, λ die Wellenlänge und r den Abstand des Aufpunktes vom Strahler bedeutet.

Die Amplitude a ist konstant und kann beliebig gewählt werden. Im allgemeinen wird sie so gewählt, daß das resultierende Hauptmaximum die Größe 1 bekommt, d. h. daß beispielsweise

bei n Einzelstrahlern jeder Strahler die Amplitude $\frac{1}{n}$ bekommt¹⁾.

I. Die Peilschärfe von willkürlich in einer Ebene verteilten Strahlern.

Wir denken uns n punktförmige Strahler S_1, S_2, \dots, S_n in der XY -Ebene durch ihre Koordinaten: $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n$ gegeben. Sind r_1, r_2, \dots, r_n die entsprechenden Entfernungen vom Aufpunkt A und setzen wir die Amplitude jedes Strahlers gleich $\frac{1}{n}$, so ist der in A resultierende Vorgang gegeben durch:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_k}{\lambda} \right)$$

und die resultierende Amplitude ist:

$$R_A = \frac{1}{n} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \cos 2\pi \frac{r_k}{\lambda} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{r_k}{\lambda} \right)^2}$$

Es ist klar, daß in Richtung der Z -Achse stets ein Maximum von der Größe 1 eintritt, gleichgültig wie die Strahler in der Ebene verteilt sind. Der Verlauf dieses Hauptmaximums bestimmt im allgemeinen den Hauptsektor der ausgestrahlten Energie, d. h. die Peilschärfe. Im folgenden soll zunächst der Verlauf der Richtcharakteristik in der Umgebung dieses Hauptmaximums bei willkürlicher Verteilung der Strahler untersucht werden.

Es erleichtert die Rechnung wesentlich, wenn wir den Schwingungsvorgang des einzelnen Strahlers als Vektor auffassen und in komplexer Form darstellen:

$$p_k = \frac{1}{n} e^{2i\pi \left(\nu t - \frac{r_k}{\lambda} \right)}$$

Dann ergibt sich die resultierende Amplitude als absoluter Betrag des resultierenden Vektors in der Form:

$$R = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n e^{-2i\pi \frac{r_k}{\lambda}} \right|$$

Bildet die Aufpunktgerade, d. h. die Verbindungslinie des Aufpunktes A mit dem Koordinaten-

anfangspunkt O (s. Abb. 1), mit den Achsen die Winkel α, β, γ , so projizieren wir die Strecken OS_1, OS_2, \dots, OS_n auf die Aufpunktgerade. Sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die entsprechenden Projektionen, so ist, wenn $OA = r$ und $\frac{2\pi}{\lambda} = z$ gesetzt wird:

$$r_m = r \cdot \xi_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

und die Richtcharakteristik, die wir, um die Abhängigkeit von α, β anzudeuten, mit $R_{\alpha, \beta}$ bezeichnen, bekommt die Form:

$$R_{\alpha, \beta} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n e^{iz\xi_p} \quad (1)$$

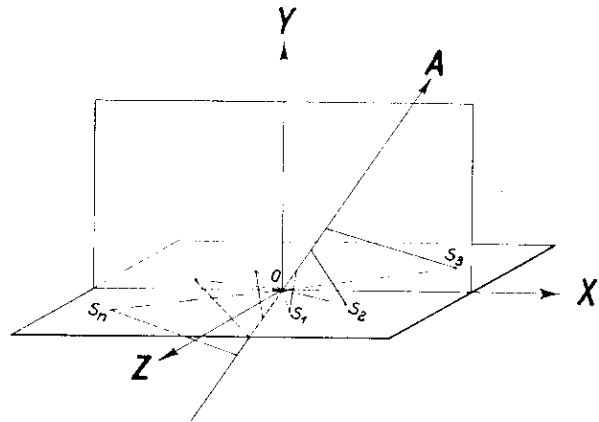


Abb. 1. Willkürlich verteilte Strahler.

Dabei ist: $\xi_p = x_p \cos \alpha + y_p \cos \beta$. Entwickelt man die Summe in (1), so folgt:

$$R_{\alpha, \beta} = \frac{1}{n} \left| n + iz (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) - \frac{z^2}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) + \dots \right| \quad (2)$$

Jetzt denken wir uns jeden Strahler durch einen

Punkt mit der Masse $\frac{1}{n}$ ersetzt und legen den Koordinatenanfangspunkt O in den Schwerpunkt des Systems; dann ist, weil $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ und $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$,

$$\text{auch } \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 0.$$

Nun ist:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cos^2 \alpha + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \cos^2 \beta + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \cos \alpha \cos \beta$$

Läßt man dann die X - und Y -Achse mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, so verschwindet bekanntlich das Produkt: $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Aus (2) folgt dann, wenn wir Glieder höher als zweiten Grades vernachlässigen:

¹⁾ Vgl. die Abhandlung ENT 4, Heft 6, 1927: „Über die Richtwirkung von Schallstrahlern“, wo besonders die gerade Gruppe behandelt ist.

$$R_{\alpha, \beta} = \left| 1 - \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \cos^2 \alpha + \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{n} \cos^2 \beta \right) \right|.$$

Setzen wir noch:

$$\mathfrak{I}_x = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}, \quad \mathfrak{I}_y = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{n},$$

so folgt:

$$R_{\alpha, \beta} = \left| 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} [\mathfrak{I}_x \cos^2 \alpha + \mathfrak{I}_y \cos^2 \beta] \right|. \quad (3)$$

Es ist ohne weiteres klar, daß diese Formel auch für flächenhafte Strahler gilt; man hat nur die Trägheitsmomente \mathfrak{I}_x und \mathfrak{I}_y durch die entsprechenden Integrale auszudrücken. Auch ist es keineswegs notwendig, daß die Maximalamplituden der einzelnen Strahler denselben Wert haben. Man hat nur nötig, den einzelnen Strahlern nicht dieselbe Masse gleich $\frac{I}{n}$ zuzuteilen, sondern muß sie proportional der Maximalamplitude wählen.

II. Die Richtcharakteristik von einfachen kontinuierlichen Strahlern.

Bei der Berechnung von Richtcharakteristiken von kontinuierlichen Strahlern treten an Stelle der Summen Integrale; dann ist nach (1) die Richt-

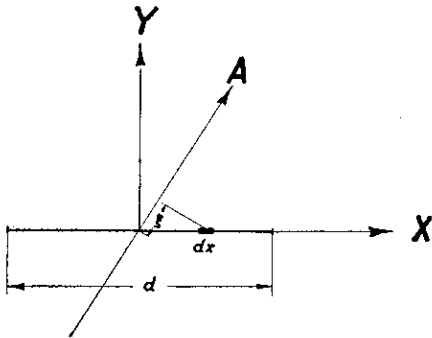


Abb. 2. Gerade als Strahler.

charakteristik eines linearen Strahlers von der Länge d (s. Abb. 2) gegeben durch:

$$R_\gamma = \left| \frac{1}{d} \int_0^d e^{i \kappa x \sin \gamma} dx \right|, \quad \text{wobei } \xi = x \sin \gamma \text{ ist.}$$

Dann folgt:

$$R_\gamma = \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma} \right|. \quad (4)$$

Analog folgt für die Kreislinie (s. Abb. 3), wobei wir zweckmäßig den Strahl zum Aufpunkt in die XZ -Ebene legen können, da dies wegen der Rotationssymmetrie zur Z -Achse keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet:

$$R_\gamma = \left| \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} e^{i \kappa r \xi} ds \right|.$$

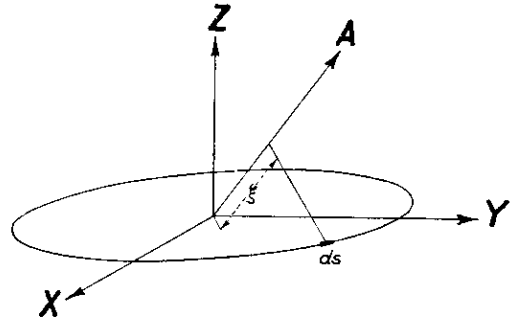


Abb. 3. Kreislinie als Strahler.

Dabei ist:

$$\xi = r \sin \gamma \cos \varphi, \quad ds = r d\varphi.$$

Dann folgt:

$$R_\gamma = \left| \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} e^{i \kappa r \sin \gamma \cos \varphi} d\varphi \right|$$

oder:

$$R_\gamma = \left| J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \right|, \quad (5)$$

wobei J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung bedeutet.

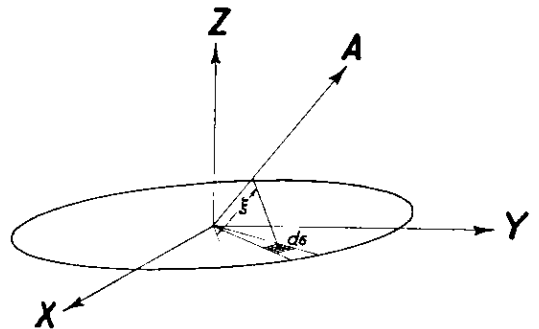


Abb. 4. Kreisfläche als Strahler.

Ebenso folgt für die Kreisfläche (s. Abb. 4)

$$R_\gamma = \left| \frac{1}{\pi r^2} \int e^{i \kappa r \xi} d\sigma \right|,$$

wobei: $\xi = r \sin \gamma \cos \varphi$, $d\sigma = r d\varphi d\rho$ ist. Dann ist:

$$R_\gamma = \frac{1}{r^2 \pi} \left| \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} e^{i \times \varrho \sin \gamma \cos \varphi} d\varphi \right|$$

$$R_\gamma = \frac{2}{r^2} \left| \int_0^r \varrho d\varrho J_0(\varrho \pi \sin \gamma) \right|$$

Also:

$$R_\gamma = \frac{2 J_1 \left(\frac{d \pi \sin \gamma}{\lambda} \right)}{\frac{d \pi \sin \gamma}{\lambda}} \quad (6)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma = \xi, \quad (7)$$

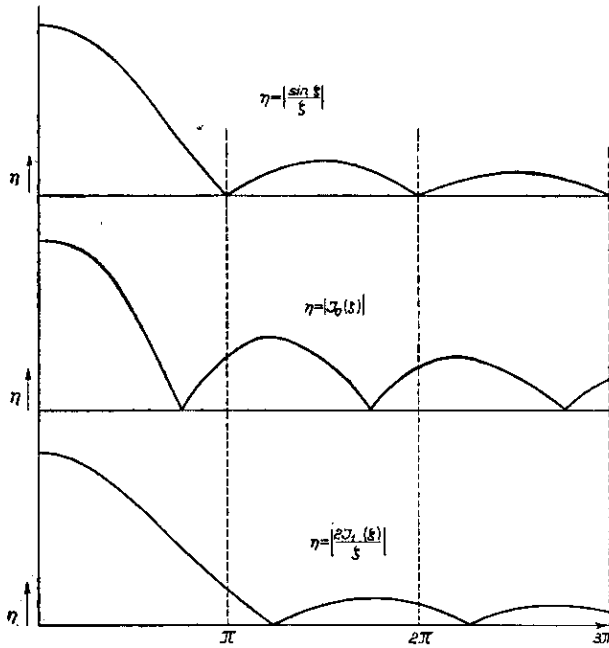


Abb. 5.

Richtcharakteristik von Gerade, Kreislinie und Kreisfläche.

so ergeben sich die charakteristischen Funktionen für gerade Linie, Kreislinie und Kreisfläche in der Form:

$$\eta = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (8)$$

$$\eta = J_0(\xi), \quad (9)$$

$$\eta = \frac{2 J_1(\xi)}{\xi}. \quad (10)$$

Diese Kurven können an Hand der vorliegenden Tabellen leicht gezeichnet werden. Man erkennt, daß alle Kurven einen ähnlichen Verlauf zeigen (s. Abb. 5).

Auf das Hauptmaximum von der Größe 1 folgen die Reihen der Nebenmaxima, die immer mehr

abnehmen. Mit Hilfe von (7) bekommt man dann eine vollständige Übersicht über die Richtcharakteristiken (4), (5) und (6). Die Anzahl der auftretenden Nebenmaxima hängt wegen (7) von dem Verhältnis $\frac{d}{\lambda}$ ab; dagegen bleibt die Größe unverändert. Bei einer strahlenden Kreismembran kann also durch Ändern des Durchmessers die Größe der aufeinanderfolgenden Nebenmaxima nicht geändert werden.

Zur Erläuterung des ersten Abschnittes sollen noch die Richtcharakteristiken dieser drei Typen nach der allgemeinen Formel (3) abgeleitet werden.

Man kann die entsprechenden Trägheitsmomente leicht ausrechnen und findet

für die gerade Linie:

$$\mathfrak{I}_x = \frac{d^2}{12}, \quad \mathfrak{I}_y = 0,$$

für die Kreislinie:

$$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_y = \frac{d^2}{8},$$

für die Kreisfläche:

$$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_y = \frac{d^2}{16},$$

dann ergeben sich die entsprechenden Richtcharakteristiken:

$$R^{(1)} = 1 - \frac{2 \pi^2 d^2}{\lambda^2 12} \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right)^2 = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

$$R^{(2)} = 1 - \frac{2 \pi^2 d^2}{\lambda^2 8} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{d \pi \sin \gamma}{\lambda} \right)^2 = 1 - \frac{\xi^2}{4}$$

$$R^{(3)} = 1 - \frac{2 \pi^2 d^2}{\lambda^2 16} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{d \pi \sin \gamma}{\lambda} \right)^2 = 1 - \frac{\xi^2}{8}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sin \xi}{\xi} = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{5!} - \dots$$

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} - \dots$$

$$\frac{2 J_1(\xi)}{\xi} = 1 - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \dots$$

Man sieht, daß in diesen Fällen die allgemeine Formel (3) erst die Glieder von vierter und höherer Ordnung vernachlässigt. Sobald es nur auf den Hauptteil der Charakteristik ankommt,

d. h. auf die Peilschärfe, ist die allgemeine Formel (3) völlig ausreichend.

Der Hauptteil der Charakteristik gibt den Hauptstrahlungskegel an, und zwar hängt dieser von dem Verhältnis $\frac{d}{\lambda}$ ab. Dieser Hauptstrahlungskegel kann für die strahlende Kreisfläche sehr einfach angegeben werden. Man braucht nur den geraden Kegel zu zeichnen, dessen Seitenlinie gleich dem Durchmesser des Strahlers und dessen Grundflächenradius gleich der Wellenlänge ist. So kann man ohne Schwierigkeiten übersehen, wie die Hauptenergie bei verschiedenen

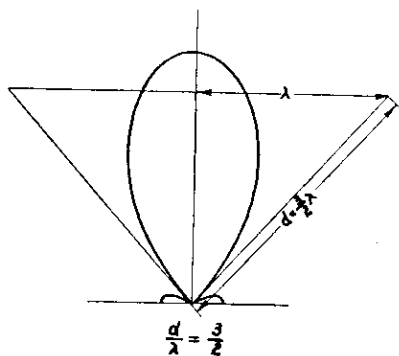


Abb. 6. Hauptstrahlungskegel der Kreisfläche.

Frequenzen infolge der Richtwirkung ausgestrahlt wird. In der Abb. 6 ist für eine strahlende kreisförmige Membran die Richtcharakteristik nach (6) und die angegebene Konstruktion des Hauptstrahlungskegels dargestellt.

III. Die Richtcharakteristik von regelmäßig angeordneten punktförmigen Strahlern.

a) Die gerade Gruppe.

Sind n Strahler X_1, X_2, \dots, X_n in gleichem Abstand d auf der X -Achse angeordnet, so folgt aus (1) die Charakteristik (s. Abb. 7):

$$R_\gamma = \frac{I}{n} \left| \sum_{p=1}^n e^{i x_p d \sin \gamma} \right|$$

Dabei ist:

$$\xi_p = x_p \sin \gamma = (p-1) d \sin \gamma$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich die geometrische Reihe:

$$R_\gamma = \frac{I}{n} \left| \sum_{p=1}^n e^{i \times d (p-1) \sin \gamma} \right|$$

Die Reihe kann leicht summiert werden und es folgt:

$$R_\gamma = \frac{I}{n} \left| \frac{e^{i n \times d \sin \gamma} - 1}{e^{i \times d \sin \gamma} - 1} \right| = \left| \frac{\sin n \varphi}{n \sin \varphi} \right|, \quad (11)$$

wobei zur Abkürzung:

$$\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$$

gesetzt ist. Die Charakteristik läßt sich am einfachsten übersehen, wenn man die Kurve:

$$r = \left| \frac{\sin n \varphi}{n \sin \varphi} \right| \quad (12)$$

zeichnet (s. Abb. 8).

Man sieht, daß (12) das Hauptmaximum 1 für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^\circ$ hat, und daß dazwischen

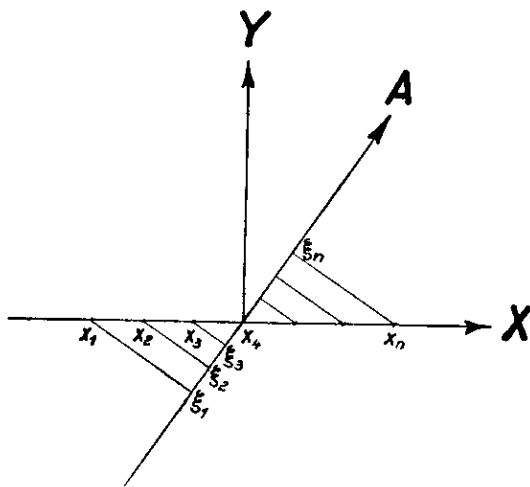


Abb. 7. Die gerade Gruppe.

$n-2$ Nebenmaxima liegen, deren Lage wegen $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ durch die transzendente Gleichung:

$$n \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} n \varphi$$

bestimmt ist. Unter Benutzung dieser Gleichung folgt aus:

$$r^2 = \frac{\sin^2 n \varphi}{n^2 \sin^2 \varphi}$$

die Gleichung:

$$r^2 = \frac{1}{n^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} \quad (13)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{n}$. Gl. (13) besagt dann, daß die Extremwerte von (12) alle auf dieser Ellipse liegen (s. Abb. 8).

Um jetzt die Charakteristik:

$$R_p = \begin{cases} \sin \left(\frac{n\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \\ - \\ n \sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \end{cases} \quad (14)$$

bei einem bestimmten n und verschiedenen $\frac{d}{\lambda}$ vollständig zu überschauen, zeichnen wir die Kurven (12) in rechtwinkligen Koordinaten r, φ und tragen darunter für die verschiedenen $\frac{d}{\lambda}$

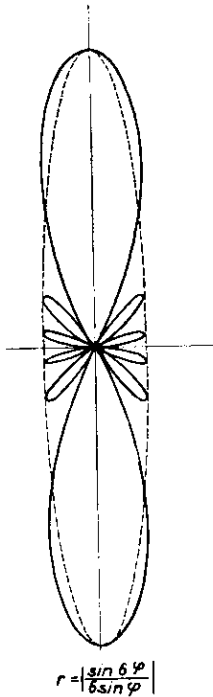


Abb. 8. Richtcharakteristik der geraden Gruppe.

die Größe $\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ ab. Man erkennt, daß mit wachsenden $\frac{d}{\lambda}$ immer mehr Hauptmaxima von der Größe 1 auftreten und zwischen ihnen jedesmal $n - 2$ Nebenmaxima liegen. Will man, wie es für manche Zwecke der Praxis wichtig ist, das Auftreten eines neuen Hauptmaximums vermeiden, so muß man die Bedingung erfüllen:

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{n-1}{n}$$

Will man zwei Charakteristiken:

$$R_1 = \left| \frac{\sin n_1 \varphi_1}{n_1 \sin \varphi_1} \right|, \quad \text{wo } \varphi_1 = \frac{\pi d_1}{\lambda_1} \sin \gamma \text{ ist,}$$

und

$$R_2 = \left| \frac{\sin n_2 \varphi_2}{n_2 \sin \varphi_2} \right|, \quad \text{wo } \varphi_2 = \frac{\pi d_2}{\lambda_2} \sin \gamma \text{ ist,}$$

bezüglich ihrer Richtwirkung vergleichen, so kann man für die Umgebung des Hauptmaximums, d. h. für kleine φ_1 und φ_2 , $\sin \varphi_1$ und $\sin \varphi_2$ durch φ_1 und φ_2 ersetzen. Dann folgt aus der Tatsache, daß für kleine Winkel:

$$\frac{\sin n_1 \varphi_1}{n_1 \varphi_1} > \frac{\sin n_2 \varphi_2}{n_2 \varphi_2}$$

dann und nur dann erfüllt ist, wenn

$$n_1 \varphi_1 < n_2 \varphi_2$$

ist, der Satz: Die Richtwirkung von R_2 ist größer, gleich oder kleiner als die von R_1 , je nachdem $\frac{n_2 d_2}{\lambda_2}$ größer, gleich oder kleiner als $\frac{n_1 d_1}{\lambda_1}$ ist. Daraus folgt z. B., wenn man zwei Gruppenanordnungen von gleicher Länge, aber mit einer verschiedenen Anzahl von Strahlern hat, daß die Anordnung die größere Richtwirkung hat, welche die geringere Anzahl von Strahlern aufweist. Man hätte dies auch ohne weiteres aus der im ersten Kapitel abgeleiteten allgemeinen Formel schließen können.

b) Die Kreisgruppe²⁾.

1. Die Ableitung der Formeln. Die bei den Kreisgruppen auftretenden Summen kann man nicht in geschlossener Form angeben. Wir werden zunächst zeigen, wie man durch Entwicklung nach Besselschen Funktionen die in Frage kommenden Summen leicht untersuchen kann.

Die bei den Kreisgruppen von $n = 2m$ Strahlern auftretenden Summen haben, wie später gezeigt wird, die Formen:

$$F_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left[x \sin \left(\varphi + \frac{\pi k}{m} \right) \right], \quad (15)$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left[x \cos \left(\varphi + \frac{\pi k}{m} \right) \right]. \quad (16)$$

Um diese Summen umzuformen, gehen wir aus von der bekannten Beziehung:

²⁾ Die Anregung für die nachfolgende Berechnung der Kreisgruppen verdanke ich Herrn Dr. Hecht, dem wissenschaftlichen Leiter der Electroacustik G. m. b. H., Kiel, der zuerst auf die praktischen Vorteile der Kreisgruppe (Unabhängigkeit der Peilschärfe und Störungsfreiheit) hinwies. Ebenso stammt von ihm der Vorschlag, zur Vermeidung der Nebenmaxima mehrere konzentrische Kreisgruppen zu verwenden.

$$e^{ix \cos \omega} = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos \omega + \dots + c_p \cos p\omega + \dots, \quad (17)$$

dabei ist:

$$c_p = 2 (i)^p \cdot J_p(x),$$

wenn $J_p(x)$ die Besselsche Funktion p ter Ordnung bedeutet.

Nimmt man auf beiden Seiten von (17) den reellen Teil, so folgt:

$$\cos(x \cos \omega) = \quad (18)$$

$$J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p J_{2p}(x) \cos 2p\omega,$$

und wenn man ω durch $\frac{\pi}{2} - \omega$ ersetzt:

$$\cos(x \sin \omega) = J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \cos 2p\omega. \quad (19)$$

Setzt man dies in (15) ein, so folgt:

$$F_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \cos 2p \left[\varphi + \frac{\pi k}{m} \right] \right\}$$

oder

$$F_1 = m \cdot J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left(2p\varphi + \frac{2\pi pk}{m} \right).$$

Formt man die letzte Summe mit Hilfe der bekannten Formel:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos(\varphi + kx) = \frac{\sin \frac{m}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \left(\varphi + \frac{m-1}{2} x \right)$$

um, so folgt:

$$F_1 = m \cdot J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p\pi}{m}} \cos \left(2p\varphi + p\pi - \frac{p\pi}{m} \right).$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p\pi}{m}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p \neq 0 \pmod{m} \\ m \cos 2p\varphi, & \text{wenn } p = 0 \pmod{m} \end{cases}$$

und damit ergibt sich das Resultat:

$$F_1 = m J_0(x) + 2m \sum_{p=1}^{\infty} J_{2pm}(x) \cos 2pm\varphi, \quad (20)$$

und wenn man φ durch $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ersetzt, ergibt sich:

$$F_2 = m J_0(x) \quad (21)$$

$$- 2m \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{pm} J_{2pm}(x) \cos 2pm\varphi.$$

Das Wesentliche an den Formeln ist, daß die Koeffizienten der ersten auf $J_0(x)$ folgenden Glieder durch $J_{2m}(x)$, $J_{4m}(x)$ usw. gegeben sind. Benutzt man ferner die Tatsache, daß

$$J_m(m-2) < 0,07 \quad (22)$$

ist, so übersieht man ohne Schwierigkeit, wieviel Glieder der Reihe man für ein vorgegebenes n und x zu nehmen hat, um F_1 und F_2 mit hinreichender Genauigkeit zu finden.

2. Die natürliche Charakteristik der Kreisgruppe. Es seien n Strahler in den Eckpunkten eines regulären n -Ecks von gerader Seitenanzahl ($n = 2m$) angebracht (s. Abb. 9). Dieses

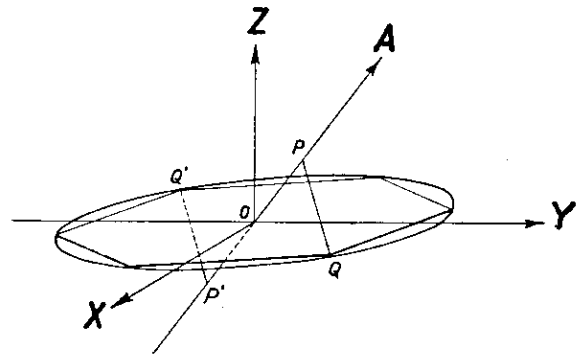


Abb. 9. Die Kreisgruppe.

liege in der XY -Ebene und die Gerade OA vom Koordinatenanfangspunkt O zum Aufpunkt A bilde mit den Achsen die Winkel α , β , γ . Greife ich zwei diametral liegende Strahler Q und Q' heraus und denke sie mir auf OA projiziert, so ist die von diesen resultierende Amplitude durch:

$$p = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r - z_k}{\lambda} \right) + a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r + z_k}{\lambda} \right)$$

$$p = 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda} z_k \cdot \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r}{\lambda} \right)$$

gegeben; dabei ist $z_k = OP = OP'$ gesetzt, wobei P und P' die Projektionen von Q und Q' sind. Sind ferner die Koordinaten von Q gegeben durch:

$$x_k = r \cos \frac{2\pi k}{n},$$

$$y_k = r \sin \frac{2\pi k}{n},$$

so ist:

$$z_k = x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta$$

und es folgt:

$$p = 2a \left[\cos \frac{2\pi r}{\lambda} \left\{ \cos^2 \frac{\pi k}{n} \cos \alpha + \sin^2 \frac{\pi k}{n} \cos \beta \right\} \right] \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r}{\lambda} \right).$$

Setzen wir die Maximalamplitude jedes Einzelstrahlers $a = \frac{1}{n}$, um das Hauptmaximum = 1 zu bekommen, so lautet die natürliche Charakteristik:

$$R_{\alpha,\beta}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{\pi d}{\lambda} \left[\cos \frac{\pi k}{m} \cos \alpha + \sin \frac{\pi k}{m} \cos \beta \right] \right\}. \tag{23}$$

Um die Formel (20) anwenden zu können, führen wir den Winkel φ ein durch die Beziehung:

$$\sin \varphi = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma},$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma},$$

dann ist:

$$\cos \frac{\pi k}{m} \cos \alpha + \sin \frac{\pi k}{m} \cos \beta = \sin \gamma \cdot \sin \left(\varphi + \frac{\pi k}{m} \right)$$

und aus (23) folgt:

$$R_{\alpha,\beta}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{d\pi}{\lambda} \sin \gamma \left[\sin \left(\varphi + \frac{\pi k}{m} \right) \right] \right\}. \tag{24}$$

Jetzt können wir die Formel (20) anwenden und erhalten das Resultat:

$$R_{\alpha,\beta}^{(n)} = J_0 \left(\frac{d\pi}{\lambda} \sin \gamma \right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{pn} \left(\frac{d\pi}{\lambda} \sin \gamma \right) \cos pn \varphi.$$

Interessant ist vor allem die Frage, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit:

$$R_{\alpha,\beta}^{(n)} = J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \tag{25}$$

gesetzt werden kann, oder anders ausgedrückt: wie klein muß der Strahlerabstand gewählt werden, damit die Charakteristik praktisch mit der der kontinuierlichen Kreislinie übereinstimmt. Das ist nun für jedes bestimmte n leicht aus der Formel (24) festzustellen. Haben wir etwa 12 Strahler, so brauchen wir nur dafür zu sorgen, daß $J_{12} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)$ vernachlässigt werden kann, d. h. es muß nach (22):

$$\frac{\pi d}{\lambda} < 10$$

sein. Praktisch wird man etwas anders vorgehen. Zunächst wird man eine dem entsprechenden Problem nötige Peilschärfe vorschreiben müssen.

Das wird offenbar erreicht, wenn $\frac{d}{\lambda}$ nicht unter eine bestimmte Größe fällt. Damit ist also der Durchmesser der Kreisbasis festgelegt und jetzt muß man die Anzahl der Strahler so wählen, daß:

$$n > \frac{\pi d}{\lambda} + 2 \tag{26}$$

ist. Eine weitere Vergrößerung der Strahleranzahl für diesen Kreisdurchmesser würde keinen Zweck haben, da dadurch an der Charakteristik praktisch nicht das geringste geändert wird. Ist die Bedingung (26) erfüllt, so lassen sich alle Fragen über Peilschärfe, Größe und Lage der Nebenmaxima ohne weiteres aus der charakteristischen Funktion $\eta = J_0(\xi)$ ablesen. Wir sehen, daß die Charakteristik nur von γ abhängt, d. h. rotationssymmetrisch zur Z-Achse liegt. Soll die Charakteristik kein Nebenmaximum haben, so muß:

$$\frac{\pi d}{\lambda} \leq 2.4, \text{ d. h. } \frac{d}{\lambda} \leq \frac{3}{4}.$$

Will man größere Peilschärfe erzielen, so muß man Nebenmaxima mit in Kauf nehmen. Treten Nebenmaxima auf, so ist ihre Größe der Reihe nach

$$0.4, 0.3, 0.25 \text{ usw.}$$

aus der Abb. 5 abzulesen.

Ist $\frac{d}{\lambda}$ größer als es der Bedingung (26) entspricht, so muß man das erste Glied der unendlichen Summe hinzunehmen. Für 12 Strahler hätten wir dann zu setzen:

$$R_{\alpha,\beta}^{(12)} = J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) + 2 J_{12} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \cos 12 \varphi.$$

Diese Formel ist dann praktisch genau, solange $J_{24} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)$ vernachlässigt werden kann; das ist der Fall, solange:

$$\frac{\pi d}{\lambda} \leq 22, \text{ d. h. } \frac{d}{\lambda} < 7$$

ist.

Im einzelnen soll das nicht weiter ausgeführt werden, da wir später in dem praktisch wichtigeren Fall der künstlichen Charakteristik eine Reihe von Beispielen bringen werden. Um die verschiedenen Fälle der natürlichen Charakteristik zu zeichnen, ist zunächst die Kurve:

$$\eta = J_0(\zeta)$$

zu zeichnen und auf der X -Achse sind die Werte von γ aufzutragen, für welche:

$$x = \frac{d\pi}{\lambda} \sin \gamma.$$

Diese Kurven sind also unabhängig von der Anzahl der Strahler, sobald nur die Bedingung:

$$n > \frac{\pi d}{\lambda} + 2$$

erfüllt ist.

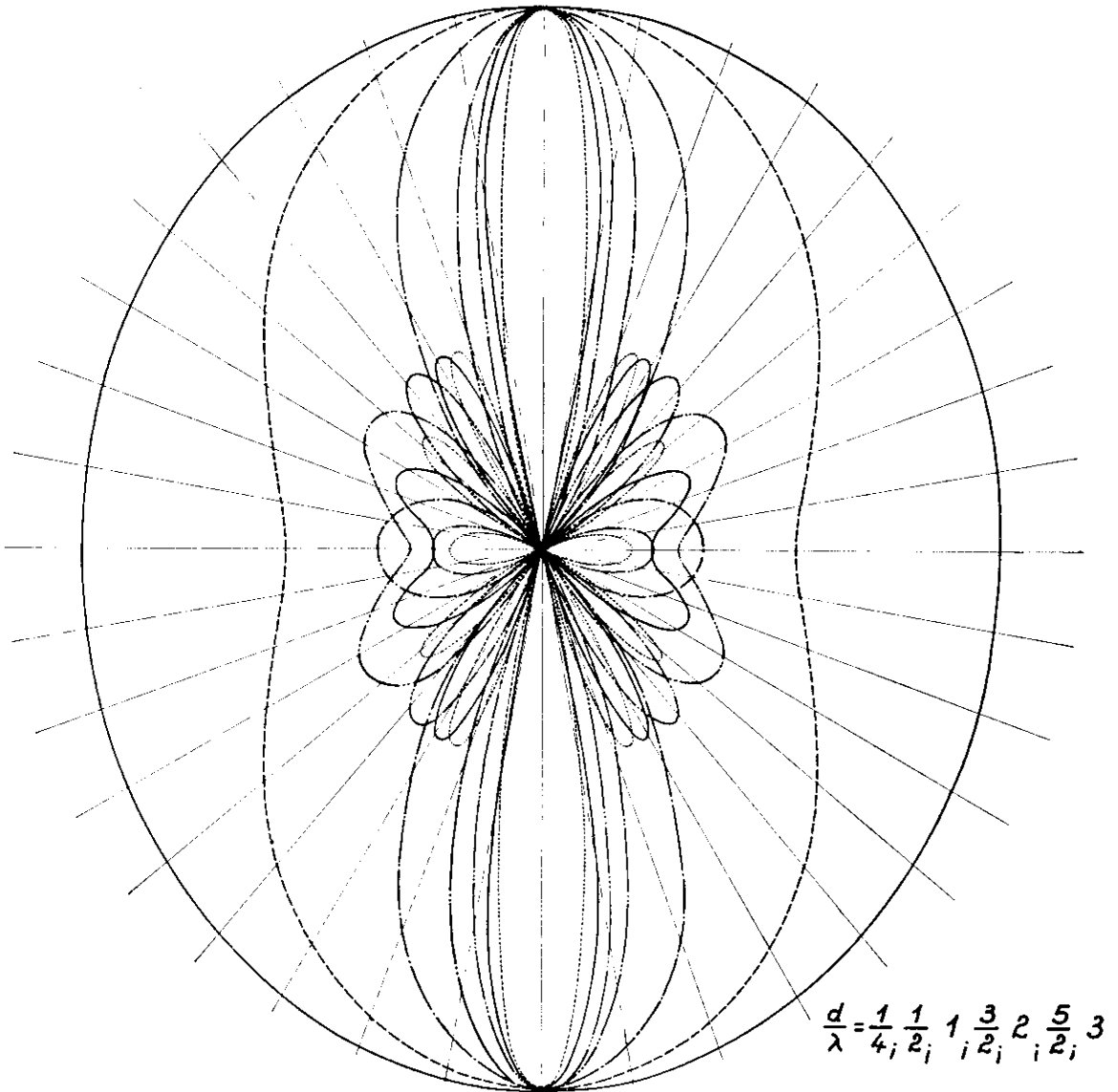


Abb. 10. Die natürliche Charakteristik der ebenen Kreisgruppe im Raum.

Dann kann ohne weiteres der entsprechende Wert von $J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma\right)$ abgegriffen werden. Die entsprechenden Kurven sind in der Abb. 10 in Polarkoordinaten für $\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$ gezeichnet.

c) Die Kombination von Systemen.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, kann man aus der Charakteristik eines Systems, bei dem jeder einzelne Strahler für sich ungerichtet ist, ohne weiteres auf die Charakteristik des Systems schließen, das aus dem ursprünglichen entsteht, wenn man bei allen Einzelstrahlern

eine bestimmte, für alle Einzelstrahler gleiche Richtcharakteristik voraussetzt. Mit anderen Worten: hat man ein Strahlersystem \mathfrak{S}_1 mit n einzelnen ungerichteten Strahlern, dessen Richtcharakteristik durch $R_1(\alpha, \beta, \gamma)$ gegeben ist und setzt an Stelle eines jeden Einzelstrahlers ein System \mathfrak{S}_2 mit der Charakteristik $R_2(\alpha, \beta, \gamma)$, dann ist die Charakteristik R des aus n Systemen \mathfrak{S}_2 bestehenden Strahlersystems durch das Produkt:

$$R = R_1(\alpha, \beta, \gamma) \cdot R_2(\alpha, \beta, \gamma)$$

gegeben. Besteht z. B. das System \mathfrak{S}_1 aus zwei Strahlern in Abstand d_1 , so ist die Charakteristik

$$R_1(\gamma) = \left| \cos\left(\frac{\pi d_1}{\lambda} \sin \gamma\right) \right|.$$

Ersetzt man jeden Strahler wieder durch ein Strahlersystem \mathfrak{S}_2 , das aus zwei Strahlern im Abstand d_2 besteht, so hat das aus vier Strahlern bestehende System die Charakteristik:

$$R = R_1 \cdot R_2 = \left| \cos\left(\frac{\pi d_1}{\lambda} \sin \gamma\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi d_2}{\lambda} \sin \gamma\right) \right|.$$

Ebenso ergibt sich zum Beispiel die Richtcharakteristik eines Systems, das aus zwei kongruenten Kreisflächen besteht, deren Durchmesser d_1 ist und deren Mittelpunkte einen Abstand d_2 haben:

$$R_\gamma = \left| \frac{2 J_1\left(\frac{d_1 \pi}{\lambda} \sin \gamma\right)}{d_1 \pi \sin \gamma} \cos\left(\frac{\pi d_2}{\lambda} \sin \gamma\right) \right|.$$

Kennen wir z. B. die Richtcharakteristik einer Einzelantenne, so können wir ohne weiteres die Richtcharakteristik eines Systems von solchen Antennen hinschreiben, wenn die Richtcharakteristik des entsprechenden, aus ungerichteten Einzelstrahlern bestehenden Systems gefunden ist. Ebenso läßt sich die Richtcharakteristik eines Systems von Lautsprechern, die etwa gitterförmig in der Ebene angebracht sind, sofort angeben, falls die Richtcharakteristik des einzelnen Lautsprechers bekannt ist.

IV. Die Richtcharakteristik bei künstlicher Phasenverschiebung.

a) Die gerade Gruppe.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß die in einer Ebene befindlichen Strahler alle gleichphasig strahlten, so daß für die durch die Z -Achse gegebene Richtung stets ein Hauptmaximum vor-

handen war. Für viele praktische Fragen ist aber der Fall von Bedeutung, daß den einzelnen Strahlern von vornherein eine künstliche Phasenverschiebung gegeben werden kann. Wir sprechen dann von der künstlichen Richtcharakteristik. Handelt es sich z. B. bei akustischen oder funktelegraphischen Aufgaben darum, einen gerichteten Strahl im Kreise herumwandern zu lassen, wie man es optisch durch einen Scheinwerfer erreicht, oder durch Peilung festzustellen, wo sich ein Strahler befindet, so wird es oft aus technischen Gründen nicht möglich sein, dies durch Drehen des ganzen Systems zu erreichen. Man wird dies einfacher bewirken, indem man das

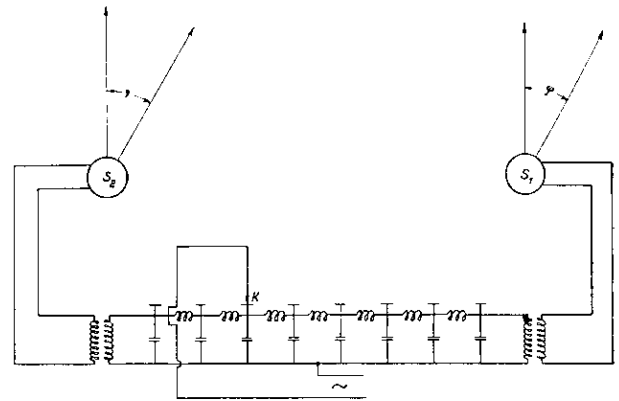


Abb. 11. Phasenschieber.

System festläßt und nur die gegenseitige Phasenverschiebung der Strahler systematisch ändert. Auf die Art, wie solche Phasenverschiebungen bewirkt werden, soll nur kurz eingegangen werden. Es ist ja bekannt, daß elektrische Phasenverschiebungen sehr einfach mit Hilfe von Wagnerischen Siebketten, die pro Glied eine bestimmte Verzögerung hervorrufen, erreicht werden.

Haben wir etwa zwei Strahler S_1, S_2 , die elektrisch erregt werden, so kann man, wie in der Abb. 11 schematisch angedeutet, durch Verschieben des Kontaktes K eine beliebige Phasenverschiebung erreichen. Und wenn umgekehrt ein Empfangssystem von außen ungleichphasig erregt wird, so kann durch Herstellen der Phasengleichheit das Maximum der Lautstärke im Kopfhörer erzielt werden. Die bisher behandelte natürliche Charakteristik entsteht, wenn man das System festläßt und den Aufpunkt im Kreise herumwandern läßt oder den Aufpunkt festläßt und das System herumdreht. Die künstliche Charakte-

ristik aber entsteht, wenn Aufpunkt und System fest bleiben, während der Phasenschieber die entsprechende Phasenverschiebung erzeugt, oder wenn System und Phasenschieber unverändert bleiben, während der Aufpunkt im Kreise herumwandert. Der wesentliche Unterschied ist, daß die künstliche Charakteristik von der Lage des Aufpunktes zum System abhängt.

Bezeichnen wir den zu jeder Stellung des Phasenschiebers gehörenden Kompensationswinkel, d. h. den Winkel, für den bei der bestimmten Stellung des Schiebers das Maximum eintritt, mit φ , so kann man ohne weiteres aus den

nicht mehr, um ein störendes Nebenmaximum zu vermeiden. Man überzeugt sich leicht, daß jetzt:

$$\frac{d}{\lambda} \approx \frac{n-1}{2n}$$

gewählt werden muß³⁾.

Will man also mit einer festen Anordnung in beliebigen Richtungen strahlen oder empfangen, so erweist sich die gerade Gruppe als wenig geeignet. Wir werden sehen, daß bei zweckmäßiger Wahl von Kreisdurchmesser und Strahlernzahl bei der Kreisgruppe diese Nachteile beseitigt werden.

b) Die Kreisgruppe.

Die Strahler sollen wie vorher die Ecken eines regelmäßigen $2m$ -Ecks bilden. Aber jeder von ihnen bekommt eine künstliche Phasenverschiebung, die bewirkt, daß für eine bestimmte Richtung (Kompensationsrichtung) alle Strahler gleichphasig zur Wirkung kommen. Die Charakteristik entsteht dann also, indem bei einer bestimmten Kompensationsrichtung die resultierende Amplitude für alle Richtungen im Raume bestimmt wird.

Ist die Richtung der Kompensationsgeraden durch $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und die Richtung der Aufpunktgeraden durch α, β, γ gegeben, so bekommt man leicht die zu (23) analoge Formel:

$$R_{\alpha, \beta} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{\pi d}{\lambda} \left[\cos \frac{\pi k}{m} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) + \sin \frac{\pi k}{m} (\cos \beta - \cos \beta_0) \right] \right\}$$

Wir führen den Winkel ψ ein durch:

$$\sin \psi = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2}}$$

$$\cos \psi = \frac{\cos \beta - \cos \beta_0}{\sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2}}$$

Dann ist:

$$R_{\alpha, \beta}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left[f \sin \left(\psi + \frac{k\pi}{m} \right) \right], \quad (28)$$

wobei zur Abkürzung:

$$f = \frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} \quad (29)$$

³⁾ In der erwähnten Abhandlung ENT 4, Heft 6, 1927, ist S. 246 unten versehentlich $d \leq \frac{\lambda}{2}$ geschrieben.

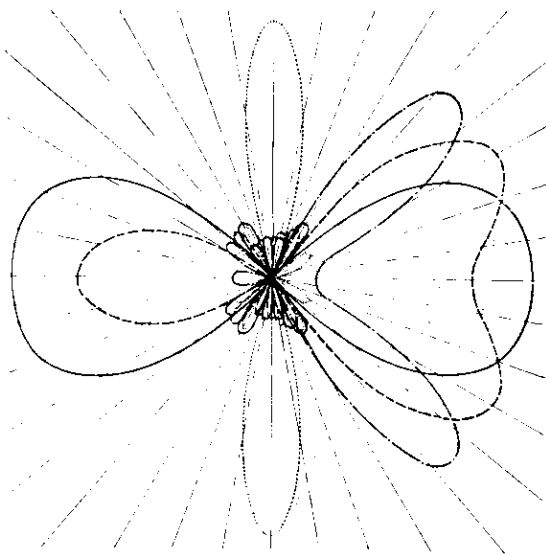


Abb. 12. Die Peilschärfe bei der künstlichen Charakteristik.

früheren Formeln die künstliche Richtcharakteristik hinschreiben. So folgt für die gerade Gruppe aus (14):

$$R_{\gamma} = \left| \frac{\sin \left[\frac{n\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \varphi) \right]}{n \sin \left[\frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \varphi) \right]} \right|, \quad (27)$$

und wir sehen, daß nur, wenn $\gamma = 0$ ist, die künstliche Charakteristik mit der natürlichen übereinstimmt. Mit wachsenden γ wird das Hauptmaximum immer breiter, so daß es für $\gamma = 90^\circ$ praktisch zum Peilen ungeeignet wird. In der Abb. 12 ist die künstliche Charakteristik R_{φ} für

$n = 6, d = \frac{\lambda}{2}$ und $\gamma = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ dargestellt.

Außerdem genügt die Bedingung:

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{n-1}{n}$$

gesetzt ist, und die Anwendung der Gl. (20) gibt:

$$R_{\alpha, \beta}^{(n)} = J_0(f) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{pn}(f) \cos n \psi. \quad (30)$$

Es zeigt sich, daß auch hier ähnlich wie bei der geraden Gruppe eine Abhängigkeit der Peilschärfe von der Peilrichtung besteht. Beschränken wir die Peilungen etwa auf die XZ -Ebene, so ist $\beta = \beta_0 = 90^\circ$, und es wird:

$$f = -\frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_0).$$

Nehmen wir beispielsweise $\frac{d}{\lambda} = 1$ und einmal $\gamma_0 = 0$ und das andere Mal $\gamma_0 = 90^\circ$. Im ersten Fall ist für den um φ von der Kompensationsrichtung abweichenden Strahl die Charakteristik bei genügend großen n gleich $J_0(\pi \sin \varphi)$, im zweiten Fall gleich $J_0[\pi(1 - \cos \varphi)]$.

Ich muß im ersten Fall $\varphi = 29^\circ$, im zweiten Fall $\varphi = 59^\circ$ wählen, um auf die halbe Amplitude zu kommen, d. h. im ersten Fall ist die Charakteristik peilschärfer. Wie es ja physikalisch ohne weiteres klar ist, müßte man auf der Kugelfläche eine Verteilung von Strahlern annehmen, um im Raum eine von der Kompensationsrichtung unabhängige Peilschärfe zu bekommen.

Dagegen wird sich zeigen, daß, wenn wir uns auf die XY -Ebene beschränken, wir die Peilschärfe unabhängig von der Kompensationsrichtung bekommen werden. Darin beruht der besondere Wert der ebenen Kreisgruppen.

Die Strahler sind wie vorher angeordnet und ihre Anzahl $n = 2m$. Bildet dann die Kompensationsgerade in der XY -Ebene mit den Verbindungslinien von zwei diametralen Strahlern bzw. die Winkel:

$$\beta, \beta + \frac{\pi}{m}, \beta + \frac{2\pi}{m}, \dots, \beta + \frac{m-1}{m}\pi,$$

so ist jetzt:

$$R_{\alpha}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{\pi d}{\lambda} \left[\cos \left(\alpha + \frac{\pi k}{m} \right) - \cos \left(\beta + \frac{k\pi}{m} \right) \right] \right\}.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann in bekannter Weise umgeformt werden, so daß man erhält:

$$R_{\alpha}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{k\pi}{m} \right) \right\}.$$

Wendet man die Formel (20) an, so folgt:

$$R_{\alpha}^{(n)} = J_0 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} J_{pn} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} n p \right). \quad (31)$$

Diese Formel zeigt, daß bei Vernachlässigung der Glieder unter dem Summenzeichen, d. h. bei genügend großen n , die Charakteristik nur von der Differenz der Winkel α und β abhängt. Das bedeutet aber, daß die Peilschärfe unabhängig von der Kompensationsrichtung wird. Um die Bedingung für n genauer zu formulieren, hat man zu bedenken, daß für die Peilschärfe nur der Teil der Charakteristik in Frage kommt, der vom Hauptmaximum nach beiden Seiten bis Null reicht. Wir nennen diesen Teil den Hauptteil der Charakteristik. Nun ist die erste Nullstelle von $J_0(x)$ durch $x = 2,4$ gegeben. Also ist der entsprechende Winkel $\alpha - \beta$ durch:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2,4$$

gegeben. Dann folgt aus der Tatsache, daß praktisch:

$$J_n(2,4) = 0, \quad \text{für } n \geq 4$$

gesetzt werden kann, daß der Hauptteil der Charakteristik für $n \geq 4$ gegeben ist durch:

$$R_{\alpha}^{(n)} = J_0 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \quad (32)$$

Das bedeutet, daß der Hauptteil der Charakteristik sich mit den Kompensationsgeraden ungeändert herumgedreht oder anders ausgedrückt, daß die Peilschärfe praktisch unabhängig von der Peilrichtung ist, wenn $n \geq 4$ ist. Allgemeiner können wir sagen, daß der Teil der Charakteristik durch (32) dargestellt wird, für den die Ungleichung gilt:

$$n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + 2.$$

Ist sogar die Ungleichung:

$$n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2 \quad (33)$$

erfüllt, so wird die ganze Charakteristik durch (32) dargestellt.

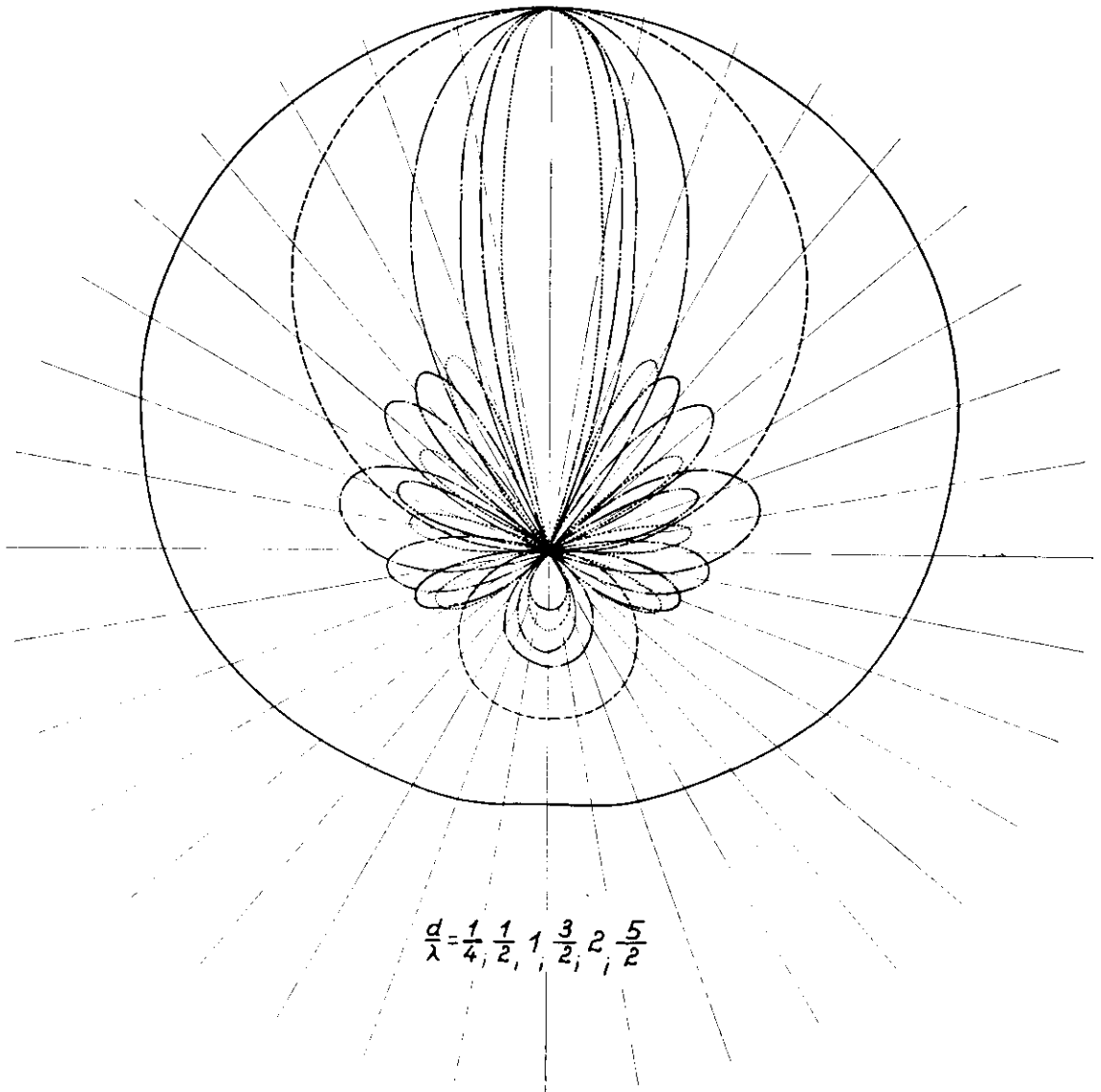


Abb. 13. Die künstliche Charakteristik der Kreisgruppe in der Ebene, wenn $n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$.

Hat man also durch Wahl von $\frac{d}{\lambda}$ eine bestimmte Peilschärfe vorgeschrieben, so wird man die Anzahl der Strahler höchstens gleich $\frac{2\pi d}{\lambda} + 2$ wählen.

Die Lage der Nebenmaxima ist dann durch die Gleichungen:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \beta = 3,83; 7; 10,17; 13,32; 16,47 \text{ usw.}$$

und ihre Größe entsprechend durch

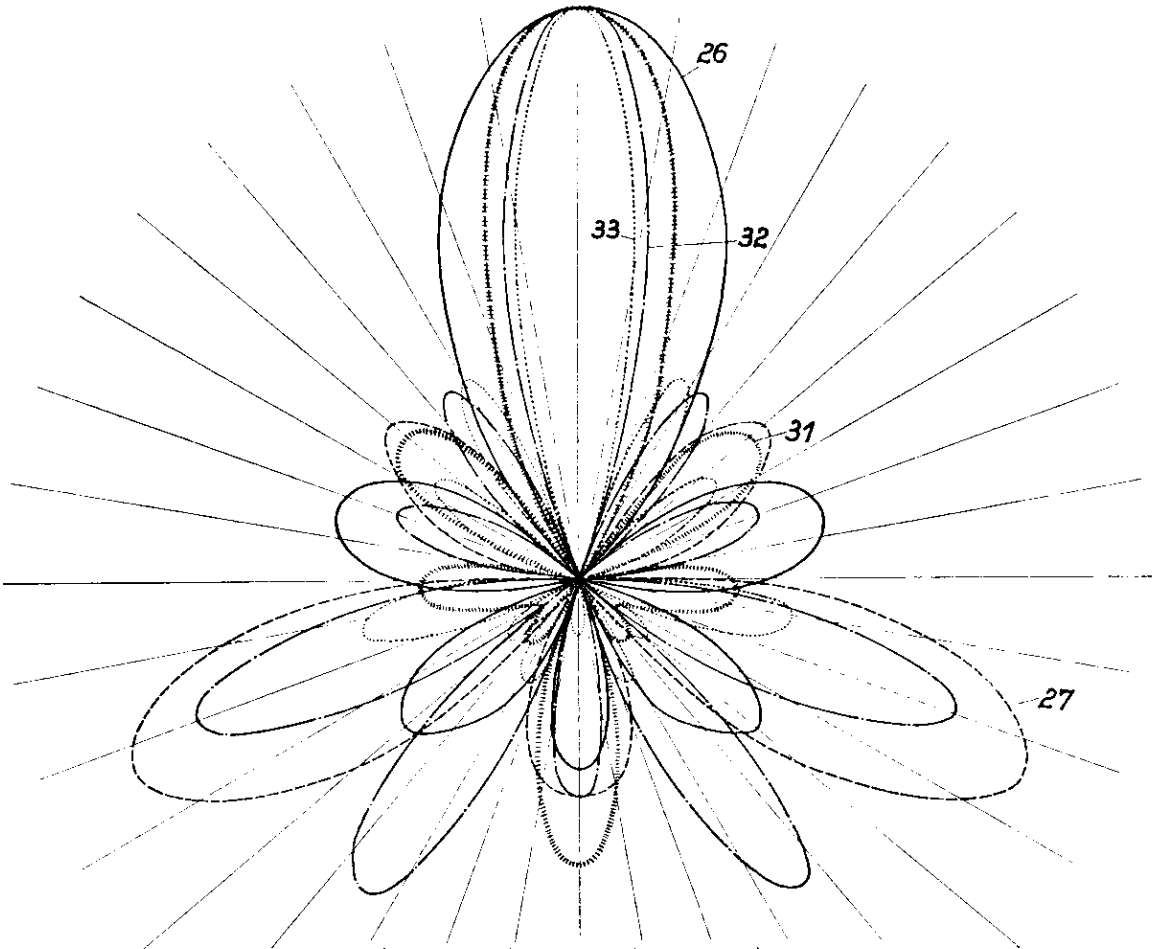
0,4; 0,3; 0,25; 0,22; 0,20 gegeben.

Um die Zweckmäßigkeit der Annäherungsformel (31) zu erläutern, wollen wir ein Beispiel für $n = 6$, $d = \frac{3}{4} \lambda$, $\beta = 0$ rechnen. Dann ist nach Formel (30)

$$R_{\alpha}^{(6)} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 \cos \left\{ \frac{3}{4} \pi \left[\cos \left(\alpha + \frac{k\pi}{3} \right) - \cos \frac{k\pi}{3} \right] \right\}.$$

Das ergibt folgende Tabelle:

α	φ_1 = $1 - \cos \alpha$	φ_2 = $-\cos(\alpha + 60^\circ)$ = $-\cos 60^\circ$	φ_3 = $-\cos(\alpha + 120^\circ)$ = $-\cos 120^\circ$	$\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_1$	$\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_2$	$\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_3$	R_α
0	0,00	0,06	0,00	1	1	1	1
10	0,02	-0,16	0,14	1	0,93	0,95	0,96
20	0,06	-0,33	0,26	0,99	0,73	0,81	0,84
30	0,13	-0,50	0,37	0,95	0,38	0,64	0,66
40	0,23	-0,67	0,44	0,86	0,00	0,48	0,45
50	0,37	-0,84	0,48	0,67	-0,41	0,41	0,22
60	0,50	-1,00	0,50	0,39	-0,69	0,37	0,02
70	0,66	-1,14	0,48	0,00	-0,90	0,43	-0,14
80	0,83	-1,27	0,44	-0,37	-0,99	0,48	-0,29
90	1,00	-1,37	0,36	-0,71	-1,00	0,66	-0,35
100	1,17	-1,44	0,26	-0,93	-0,97	0,81	-0,36
110	1,34	-1,48	0,14	-1,00	-0,95	0,95	-0,33
120	1,5	-1,50	0,00	-0,92	-0,924	1	-0,28
130	1,64	-1,48	-0,16	-0,76	-0,95	0,93	-0,25
140	1,77	-1,44	-0,33	-0,59	-0,97	0,73	-0,24
150	1,87	-1,37	-0,50	-0,31	-1	0,36	-0,32
160	1,94	-1,27	-0,67	-0,12	-0,99	0	-0,37
170	1,98	-1,14	-0,84	-0,06	-0,90	-0,37	-0,44
180	2,00		-1,00	0	-0,69	-0,69	-0,46



$26. \frac{d}{\lambda} = 1$
 $27. \frac{d}{\lambda} = 1,5$
 $31. \frac{d}{\lambda} = 1,5$
 $32. \frac{d}{\lambda} = 2$
 $33. \frac{d}{\lambda} = 2,5$

Abb. 13a. Die künstliche Charakteristik der Kreisgruppe in der Ebene, wenn $n < \frac{2 \pi d}{\lambda} + 2$.

Dagegen wird sich mit der Annäherungsformel ergeben:

$$R_{\alpha} = J_0\left(4,71 \sin \frac{\alpha}{2}\right) + 2 J_6\left(4,71 \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cos 3 \alpha.$$

Dies ergibt folgende Tabelle:

α	$4,71 \sin \frac{\alpha}{2}$	$J_0\left(4,71 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$	$2 J_6\left(4,71 \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cos 3 \alpha$	R_{α}
0	0,00	1	0	1
10	0,42	0,96	0	0,96
20	0,82	0,84	0	0,84
30	1,22	0,66	0	0,66
40	1,66	0,45	0	0,45
50	1,99	0,23	0	0,23
60	2,36	0,02	0	0,02
70	2,70	-0,14	0	-0,14
80	3,03	-0,27	-0,01	-0,28
90	3,33	-0,35	0	-0,35
100	3,61	-0,39	+0,03	-0,36
110	3,86	-0,40	+0,07	-0,33
120	4,08	-0,39	-0,10	-0,29
130	4,27	-0,37	+0,12	-0,25
140	4,43	-0,34	-0,08	-0,26
150	4,55	-0,31	+0,00	-0,31
160	4,64	-0,29	-0,10	-0,39
170	4,69	-0,27	-0,18	-0,45
180	4,71	-0,27	0,21	-0,48

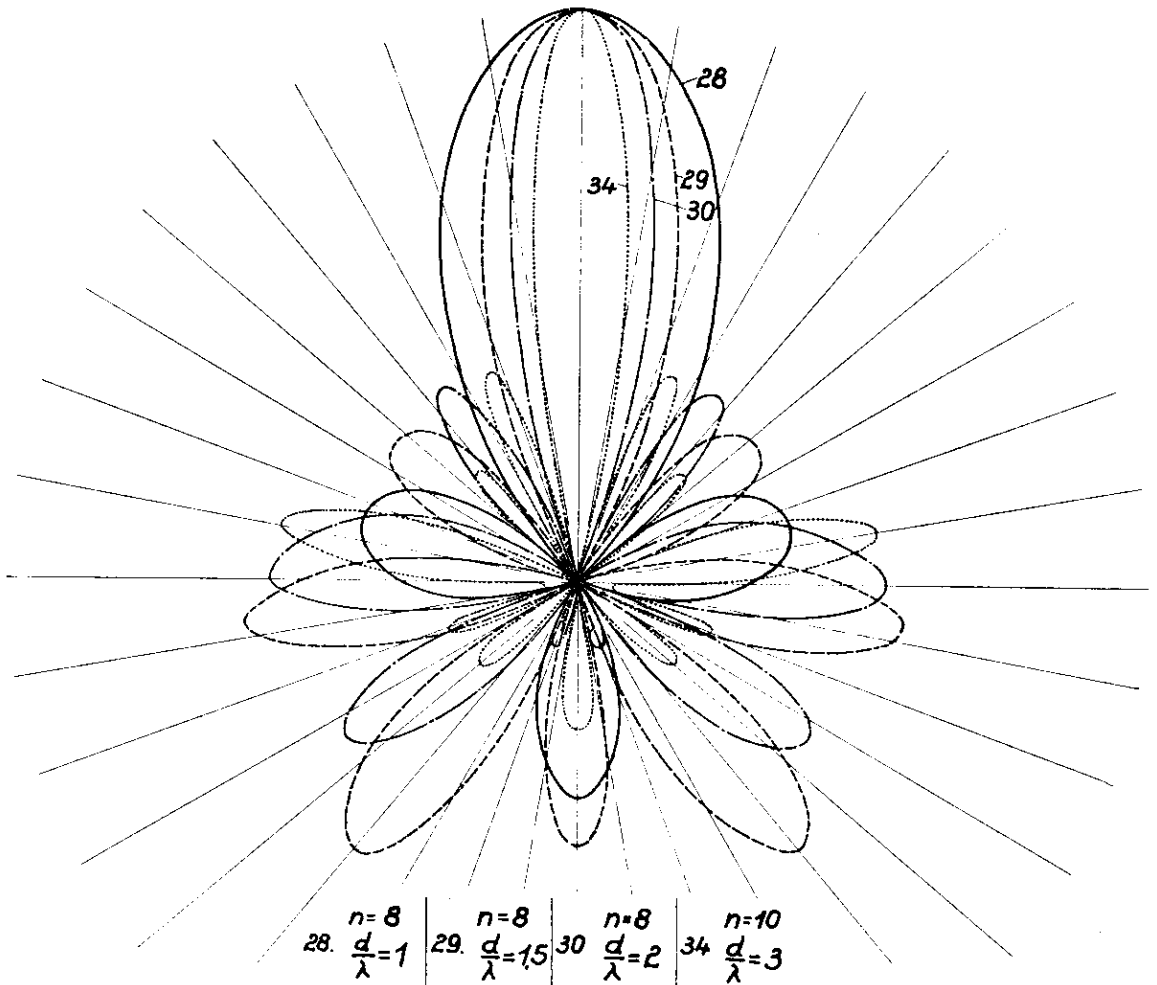


Abb. 14 b. Die künstliche Charakteristik der Kreisgruppe in der Ebene, wenn $n < \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$.

Es macht nun keine Schwierigkeit, mit Hilfe der Besselschen Funktion die Kurven

$$R = J_0 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

zu berechnen.

Sie sind für:

$$\frac{d}{\lambda} = 0,25; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3$$

in der Abb. 13 gezeichnet.

Endlich sind einige Fälle untersucht, in denen die ersten Korrektionsglieder benutzt werden müssen, da die Bedingung:

$$n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$$

nicht erfüllt ist.

Die Fälle:

$$n = 6, \quad \frac{d}{\lambda} = 1, \quad \frac{d}{\lambda} = 1,5,$$

$$n = 8, \quad \frac{d}{\lambda} = 1, \quad \frac{d}{\lambda} = 1,5, \quad \frac{d}{\lambda} = 2,$$

$$n = 10, \quad \frac{d}{\lambda} = 1,5, \quad \frac{d}{\lambda} = 2, \quad \frac{d}{\lambda} = 2,5, \quad \frac{d}{\lambda} = 3$$

sind in Abb. 14 a und b dargestellt.

Die dabei benutzten Annäherungsformeln sind:

für $n = 6$

$$R_\alpha \approx J_0 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + 2J_6 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos 3\alpha,$$

für $n = 8$

$$R_\alpha \approx J_0 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + 2J_8 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos 4\alpha,$$

für $n = 10$

$$R_\alpha \approx J_0 \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + 2J_{10} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos 5\alpha + 2J_{20} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos 10\alpha.$$

Wir haben gesehen, daß durch die Kreisgruppe die Möglichkeit gegeben ist, eine von der Peilrichtung unabhängige Peilschärfe zu erzielen. Es ist also möglich, den Strahlungssektor im Kreise herumzuschwenken, ohne daß der Sektor sich ändert. Man braucht nur dafür zu sorgen, daß der Abstand der Strahler auf dem Kreise nicht zu groß wird. Als störend traten dabei Nebenmaxima auf. Diese konnten bei einer Kreis-anordnung nur vermieden werden, wenn:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} < 2,4, \text{ d. h. } \frac{d}{\lambda} < 0,4$$

ist. Das würde aber (s. Abb. 6) bedeuten, daß der Strahlungskegel relativ breit bzw. die Peil-

schärfe relativ gering ist. Verlangt man andererseits eine größere Peilschärfe, so läßt sich auf keine Weise vermeiden, daß das erste auftretende Nebenmaximum den Wert 0,4 bekommt. Dieser Nachteil läßt sich beseitigen, wenn man an Stelle

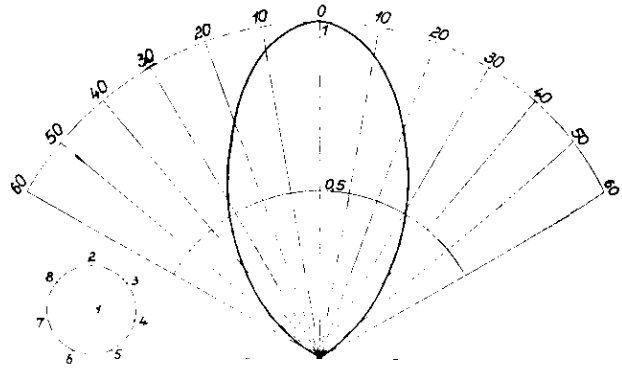


Abb. 15. Energiecharakteristik in der Ebene ohne Nebenmaximum.

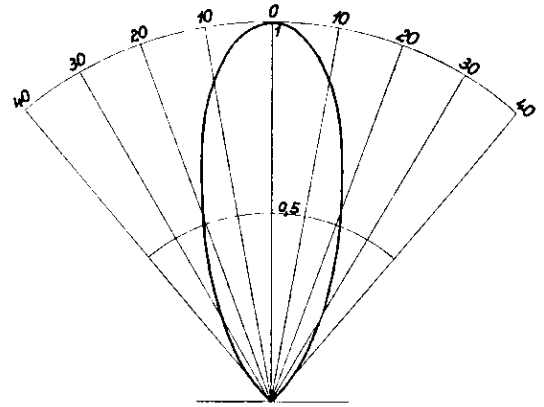


Abb. 16. Energiecharakteristik in der Ebene ohne Nebenmaximum.

einer Kreis-anordnung mehrere konzentrische verwendet. Durch passende Wahl der Kreisdurchmesser kann man erreichen, daß die Nebenmaxima sich gegenseitig zum größten Teil vernichten, während das Hauptmaximum erhalten bleibt. Entsprechende Richtcharakteristiken sind in den Abb. 15—17 gezeichnet. Schon dadurch,

daß man außer der Kreisanordnung noch einen Strahler in die Mitte des Kreises setzt, kann man ein Nebenmaximum praktisch zum Verschwinden bringen (s. Abb. 15). In der Abb. 16 ist die künstliche Energiecharakteristik in der Ebene gezeichnet, wenn sechs Strahler auf einem inneren Kreis und zehn Strahler auf dem äußeren angeordnet sind. Dabei ist der innere Durchmesser durch $\frac{d_1}{\lambda} = 0,56$, der äußere Durchmesser durch

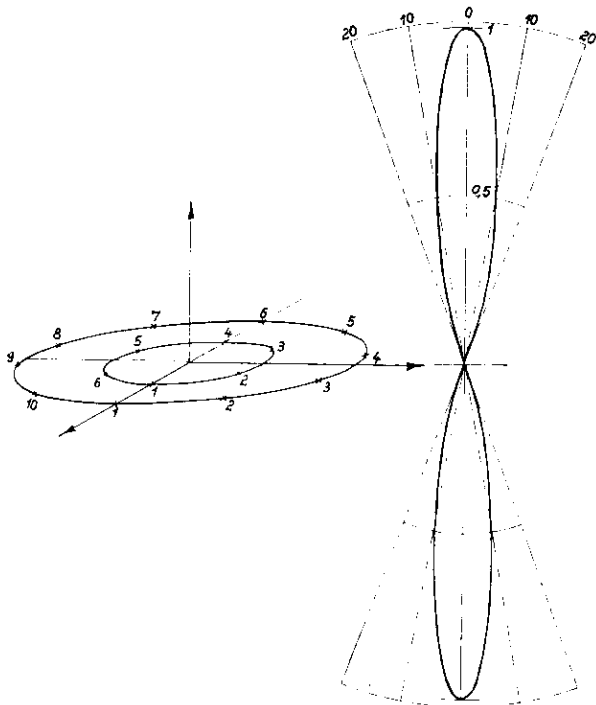


Abb. 17.

Energiecharakteristik im Raum ohne Nebenmaximum.

$\frac{d_2}{\lambda} = 1,28$ gegeben. Endlich ist für denselben Fall die natürliche Raumcharakteristik in der Abb. 17 dargestellt. Die Nebenmaxima betragen dabei weniger als 1 vH des Hauptmaximums und konnten daher in der Zeichnung nicht dargestellt werden. Dabei ist die Intensität jeder einzelnen konzentrischen Anordnung so gewählt, daß ihr Hauptmaximum gleich 1 wird. Das bedeutet, daß z. B. in der Anordnung der Abb. 15 der Strahler in der Mitte eine achtmal so große Maximalamplitude besitzt wie jeder einzelne von den im Kreis angeordneten Strahlern.

Zusammenfassung.

In dem vorstehenden ist die Richtwirkung von periodisch strahlenden Systemen untersucht. Solche Richtwirkungen sind in der Optik seit langem als Beugungserscheinungen bekannt und untersucht⁴⁾. Neuerdings spielen diese Erscheinungen in der Akustik (Lautsprecher) und Elektrizität (kurze Wellen) eine Rolle. Besonders auch in der Unterwasserschalltechnik sind für gerichtetes Senden (akustische Lotung) und gerichtetes Empfangen (akustische Peilung von Fahrzeugen) wesentliche Fortschritte gemacht.

Während es in der Optik besonders auf die Zahl und den Abstand der auftretenden Hauptmaxima ankommt, spielt hier der Verlauf der Richtcharakteristik die Hauptrolle.

Im Abschnitt I wird gezeigt, daß man die Peilschärfe, d. h. den Verlauf des Hauptteils der Charakteristik, auch bei ganz willkürlich in der Ebene verteilten Strahlern angeben kann. Für die Beurteilung der gesamten Charakteristik muß die Anordnung der Strahler im einzelnen gegeben sein. Und zwar zeigt Abschnitt II, daß für einfache kontinuierliche Strahler (gerade Linie, Kreislinie, Kreisfläche) die Charakteristik sehr einfach bestimmt wird.

Im Abschnitt III wird die natürliche Richtcharakteristik von einzelnen Strahlern, die in gerader Linie oder auf dem Kreis regelmäßig verteilt sind, untersucht, und es werden optimale Bedingungen für Abstand und Anzahl der Strahler angegeben.

Endlich wird im Abschnitt IV die „künstliche“ Richtcharakteristik untersucht, die entsteht, wenn das Strahlersystem fest bleibt, aber jeder Strahler eine entsprechende veränderliche künstliche Phasenverschiebung bekommt. Dadurch nehmen die optimalen Bedingungen eine andere Form an. Ferner tritt hier die wesentliche Überlegenheit der Kreisgruppe gegenüber der geraden Gruppe klar hervor.

(Eingegangen am 19. Dezember 1928.)

⁴⁾ Z. B. Helmholtz, Bd. V, Vorlesungen über die elektrische Theorie des Lichtes. — Müller-Pouillet, Bd. II, Optik.